РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 2484—2979 **№ 6** **Июнь 1955 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

2484. **Некоторые проблемы советской науки. Несмеянов А. Н.**, Вестн. АН СССР, 1954, № 5, 3—25

2485. **Заседания Ленинградского общегородского математического семинара.** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4, 249—255

Приводятся резюме следующих докладов, прочитанных на заседаниях семинара.

9 марта 1954 г. Г. Ю. Джанелидзе, Принцип Сен-Венана в теории упругости и связанные с ним задачи.

23 марта 1954 г. Н. А. Шанин, О конструктивном определении некоторых понятий анализа.

13 апреля 1954 г. Б. А. Венков, Об одном классе евклидовых многогранников; О. А. Ладыженская, О решении основной задачи гидродинамики вязкой жидкости.

27 апреля 1954 г. М. В. Петковский, Номография (обзорный доклад).

11 мая 1954 г. Ю. В. Линник, Цепи Маркова и целые точки на сфере; А. А. Киселев, О решении уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости.

25 мая 1954 г. Д. К. Фаддеев, З. И. Боревич, К теории гомологий в группах; Е. В. Вороновская, Полиномы наименьшего отклонения в свете функционального анализа.

2486. **Международный математический конгресс. Александров П. С.**, Вестн. АН СССР, 1954, № 12, 52—54

2487. **Федерация Математического и Физического обществ Югославии. Конгресс в Загребе. Дедиер** (Federation of Mathematics and Physics Societies of Yugoslavia. Congress in Zagreb. Dedijer Stevan), Nature, 1954, **174**, № 4443, 1179 (англ.)

Сообщение о втором конгрессе федерации Математического и Физического обществ Югославии, состоявшегося в Загребе 4—9 октября 1954 г.

На конгрессе, в частности, обсуждались вопросы преподавания математики и физики в средних школах и университетах, а также вопросы, связанные с организацией исследований по математике и физике. Специально обсуждался вопрос о математических изданиях. Президентом федерации избран математик проф. Курепа.

2488. **Весенние конференции в Математическом научно-исследовательском институте в Обервольфахе 24—30 апреля 1954 г. Зюсс** (Frühjahrstagungen im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach vom 24. bis 30. April 1954. Süß W.), Phys. Bl., 1954, **10**, № 10, 466—467 (нем.)

2489. **Годичное собрание Общества прикладной математики и механики. Мюнхен, 20—24 апреля 1954 г. Баш** (Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. München, 20—24. April 1954. Basch A.), Internat. math. Nachr., 1954, **8**, № 33/34, 22—23 (нем.)

2490. **Июньское собрание в Портланде** (The June meeting in Portland), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 5, 472—486 (англ.)

Приводятся краткие резюме докладов, представленных 504-му собранию Американского математического общества 19 июня 1954 г.

2491. **Ленинская диалектика и математика. Александров** (Ленинската диалектика и математиката. Александров А. Д.), Природа (София), 1954, **3**, № 3, 37—45 (болг.)

Перевод на болгарский язык статьи А. Д. Александрова «Ленинская диалектика и математика», Природа, 1951, № 1, 5—15.

2492 К. **Полное собрание сочинений Эйлера (сер. 1-я, Математические сочинения), 26 (Геометрические размышления. I.)** (Leonhardi Euleri opera omnia (Series I, Opera mathematica), **26** (Commentationes geometricae. I. Ed. Andreas Speiser), XXXVIII+362 p., 1953, fr. 80), Schweiz. Buchhandel., 1954, **12**, № 2, 54 (библ.)

См. также: 2902 Д

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

2493. Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми. Юшкевич А. П., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1954, **1**, 85—127

Рассматривается арифметический трактат среднеазиатского математика IX в. Мухаммеда ал-Хорезми, дошедший до нас только в средневековом латинском переводе под названием «Algorithmi de numerorum indorum». Этот трактат сыграл очень важную роль в истории математики, так как по этому трактату народы Востока научились пользоваться индийскими («арабскими») цифрами, а по его латинскому переводу или изложению эти цифры стали известны народам Европы. Этот трактат упоминался и кратко излагался во всех книгах по истории средневековой математики, но почти все авторы высказывали об этом трактате совершенно неверные суждения. Подробно анализируя дошедшую до нас рукопись, автор показывает, что эта рукопись является либо неряшливо переписанной копией неизвестной нам рукописи, либо неоконченным и неисправленным черновиком, либо ученическим конспектом. Автор устанавливает места, вставленные в рукопись переписчиком из других сочинений, и восстанавливает места, бывшие в оригинале, но пропущенные переписчиком. Трактат содержит описание 9 индийских цифр и нуля, описание позиционной системы счисления, 6 действий над целыми числами (удвоение, деление пополам, сложение, вычитание, умножение и деление) и их проверку с помощью девятки и действия с обыкновенными и шестидесятиричными дробями. Хотя рукопись обрывается на изложении действий с дробями, с помощью средневековых латинских изложений этого трактата устанавливается, что в оригинале далее следовало изложение извлечения квадратных корней из целых чисел и дробей.

Б. А. Розенфельд

2494. Дифференциальные методы в работах Архимеда. Башмакова И. Г., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 609—658

Анализируются сочинения Архимеда и доказывается, что в них имеются методы определения экстремумов и отыскания касательных к кривым, равносильные операции дифференцирования.

Общий метод определения касательных к кривым опирался на сравнение двух треугольников: бесконечно малого, образованного приращением полярного радиуса-вектора касательной Δr, отрезком касательной и соответствующим отрезком дуги $r\Delta\varphi$, и конечного треугольника, составленного из радиуса-вектора ρ, подкасательной S_t, проведенной перпендикулярно к ρ, и отрезка касательной от точки пересечения с подкасательной до точки касания.

Показано также, что общий прием Архимеда для сведения задач на экстремумы к задачам на касательные эквивалентен доказательству, что значение аргумента, дающее выражению $f(x)g(x)$ максимальное значение C, необходимо является той точкой, в которой кривые $y=f(x)$ и $y=C/g(x)$ имеют общую касательную.

Указывается, что изучение дифференциальных методов Архимеда сыграло большую роль в развитии приемов дифференциального исчисления в XVII в., в частности во введении характеристического треугольника. Отмечается, что подобная оценка методов Архимеда как дифференциальных впервые была высказана в 1893 г. датским математиком Цейтеном (Цейтен Г. Г., История математики в древности и в средние века, ГТТИ, 1932, стр. 128), но не была до сего времени достаточно развита.

К. А. Рыбников

2495. Математические трактаты Омара Хайяма. Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 9—172

Перевод с арабского на русский язык трех трактатов Омара Хайяма (около 1040—1123).

В трактате «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы» Хайям, используя сочинения Евклида «Начала» и «Данные» и две книги Аполлония «Конические сечения», дает систематическое изложение решения уравнений до 3-й степени включительно. Решение в общем виде находится геометрически, главным образом с помощью пересечения двух конических сечений. При этом Хайям учитывает лишь вещественные положительные корни. В философских разделах трактата Хайям ссылается на сочинения Аристотеля.

Трактат «Комментарии к трудным постулатам книги Евклида» состоит из трех книг. Первая книга «Об истинном смысле параллельных и об известных сомнениях» содержит оригинальную теорию параллельных, опирающуюся на рассуждения, эквивалентные допущению пятого постулата Евклида. Во второй книге: «Об отношении, пропорции и их истинном смысле» Хайям стремится усовершенствовать теорию отношений, изложенную в 5-й книге «Начал» Евклида, и установить единую теорию для чисел и величин, рассматривая некоторые категории отношений величин как числовые отношения. По определению Хайяма, два отношения A/B и C/D равны тогда и только тогда, когда равны между собой соответственные неполные частные, определяемые конечным или бесконечным алгоритмом Евклида. В третьей книге «О составлении отношений и его исследовании» Хайям вводит понятие общей абстрактной числовой величины, выражающей любое отношение, вследствие чего становится возможным применять отношения, наряду с числами, для измерения любых величин.

В третьем трактате «Об искусстве определения количества золота и серебра в состоящем из них теле» рассматривается известная задача, решенная Архимедом. Решение Хайяма основывается на взвешивании произвольных слитков чистого золота и чистого серебра в воздухе и в воде. Аналогичные исследования имеются и в работах других среднеазиатских ученых XI—XII вв.

Перевод сделал Б. А. Розенфельд при содействии Гасана Гусейн-Кули оглы Зарине-заде. Примечания принадлежат А. П. Юшкевичу и Б. А. Розенфельду.

К. А. Рыбников

2496. «Начала» Евклида по древнеармянским источникам. Туманьян Т. Г., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 659—671

Анализ сохранившегося в нескольких списках (в Ереване, Тюбингене, Венеции и Павии) перевода на армянский язык отрывка из «Начал» Евклида. Отрывок содержит определения, постулаты и первые три предложения 1-й книги «Начал». Перевод датируется XI в. н. э. Высказывается предположение, что перевод принадлежит выдающемуся армянскому ученому Григорию Магистросу.

К. А. Рыбников

2497. **Наставление, как человеку познать счисление лет. Кирик Новгородец**, Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 174—195

Фотокопия со списка рукописи новгородского монаха Кирика (1136), перевод текста рукописи и примечания. Подготовка текста к печати, сличение списков и перевод рукописи произведены Т. И. Коншиной и В. П. Зубовым. Примечания принадлежат В. П. Зубову. Среди примечаний содержится библиографическая справка по данной теме.

К. А. Рыбников

2498. **Кирик Новгородец и древнерусские деления часа. Зубов В. П.**, Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 196—212

Из рукописи Кирика Новгородца, опубликованной в этом же сборнике (стр. 174—195), исследуется отрывок о дробных делениях часа. Кирик делит час на 5 «первых дробных часа», каждую из них — на 5 «вторых дробных» и т. д. до «седьмых дробных». Этот способ сравнивается с другими способами деления времени в календарной технике средневековья. Выдвигается гипотеза, что оригинальное деление часа Кириком возникло как практически удобное средство календарного счета при операциях, основывающихся на приближенном равенстве: 19 солнечных лет = 235 лунных месяцев (метонов цикл).

К. А. Рыбников

2499. **Золотое сечение. Историко-библиографические заметки. Кавалларо** (Divina proportione. Note storico-bibliografiche. Cavallaro Vincenzo G.), Giorn. mat. Battaglini, 1952—1953, **81**, № 2, 203—218 (итал.)

Краткий обзор истории вопроса о делении отрезка в среднем и крайнем отношении (термин, встречающийся у Евклида) или золотом сечении (термин Леонардо да Винчи и Кеплера), называвшемся также «божественным» отношением или сечением (термин Л. Пачоли и Пьера делла Франческа). Обзор содержит обширную библиографию, включая сочинения о возвратном ряде Фибоначчи, о приближенных построениях золотого сечения, о его применении в архитектуре, живописи и т. д. *А. П. Юшкевич*

2500. **Об открытии Н. И. Лобачевским метода приближенного решения численных алгебраических уравнений. Рогачевко В. Ф.**, Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 477—494

Рассматривается история метода приближенного решения численных алгебраических уравнений, основанного на составлении вспомогательных уравнений, корнями которых являются достаточно высокие, вида 2^k, степени корней данного уравнения.

Доказывается, что приоритет в открытии названного метода принадлежит Н. И. Лобачевскому. Рассматриваются также работы К. Греффе и Г. Данделена. Утверждается, что Греффе открыл этот метод позже Лобачевского, а работы Данделена данного метода не содержат. *К. А. Рыбников*

2501. **Развитие теории цилиндрических функций в России и СССР. Гуссов В. В.**, Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 355—475

Продолжение исследований автора по истории специальных функций (Гуссов В. В., Работы русских ученых по теории гамма-функции. Историко-матем. исследования, вып. 5, М.—Л., Гостехиздат, 1952, 421—472).

Рассматриваются работы русских и советских ученых по теории цилиндрических функций, начиная с появления в мемуаре Д. Бернулли (1738) цилиндрической функции с нулевым индексом, до работ, вышедших в 1950 г. Привлекаются данные истории цилиндрических функций в других странах.

Вводится периодизация истории цилиндрических функций:

1) период введения понятия цилиндрических функций и первого исследования их свойств (1738—1824), к которому автор относит работы Д. Бернулли, Эйлера, Лагранжа, Фурье и Пуассона; 2) период оформления теории отдельных видов цилиндрических функций (1824—1880), начало которому положили сочинения Бесселя; 3) период создания общей теории цилиндрических функций и их обобщений, датирующийся с мемуара Н. Я. Сонина (Sonine N., Math. Ann., 1880, **16**, 1—80) и продолжающийся до наших дней.

Основной вывод статьи: «теория цилиндрических функций возникла и была в существеннейших ее элементах разработана в России и СССР» (стр. 473),— обосновывается на обширном конкретном материале. *К. А. Рыбников*

2502. **Математика в Ростовском университете. Белозеров С. Е.**, Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 247—352

Очерк истории преподавания математики и развития математических научных исследований в Ростовском (до 1915 г.— Варшавском) университете от его основания до наших дней. Статья состоит из следующих разделов:

1. Введение. Посвящено периоду организации университета (1869—1870) и первому году его деятельности. Подчеркивается, что в это время преподавание математики «велось на низком уровне, выбор математических дисциплин, по которым читались лекции, и объем курсов были случайными» (стр. 248).

2. Первые профессора математики. Н. Я. Сонин. Охватывает период работы университета до конца XIX в. Рассматривается деятельность профессоров: М. А. Андреевского (1847—1879), Н. Н. Алексеева (1828—1881) — одного из основателей Московского математического общества, и Н. Я. Сонина (1849—1915, с 1893 г. — академик). Научным достижениям последнего уделяется наибольшее внимание. Отмечается, что «основным направлением в научной работе Сонина, где он завоевал мировую известность, являлась теория определенных интегралов вообще и особенно — теория цилиндрических функций» (стр. 264).

3. Физико-математический факультет на рубеже XIX и XX вв. В. А. Анисимов.

4. Г. Ф. Вороной. В этих разделах автор показывает постепенное повышение уровня преподавания и расширения проблематики математических исследований в университете, связанное в первую очередь с деятельностью профессоров В. А. Анисимова и Г. Ф. Вороного. В основных работах В. А. Анисимова (1860—1907) разрабатывается аналитическая теория дифференциальных уравнений; Г. Ф. Вороной (1868—1908) известен своими классическими исследованиями в области теории чисел. «Наиболее выдающимся питомцем Варшавского университета этого периода был В. Серпинский, начавший работу под руководством Г. Ф. Вороного, но затем занявшийся изучением теории множеств и теории функций вещественного переменного. В. Серпинский является в настоящее время одним из крупнейших математиков народно-демократической Польши» (стр. 296).

5. Физико-математический факультет перед Великой Октябрьской социалистической революцией. Д. Д. Мордухай-Болтовской. Указывается, что «для математики последних лет жизни университета в Варшаве характерно, что в связи с приходом в него на работу новых математиков здесь начинают разрабатываться и новые проблемы: некоторые вопросы классического анализа (Мордухай-Болтовской, Романовский), алгебры и теории чисел (Вельмин) и теоретической механики (Горячев). В учебной работе по математике того времени можно отметить некоторое увеличение числа общих и специальных курсов, начало работы геометрического кабинета и семинара для студентов старших курсов, что способствовало вовлечению большего числа студентов в исследовательскую работу» (стр. 321).

6. Математика в Ростовском университете в советский период. Приводятся данные о большой работе, ведущейся в университете по воспитанию кадров научных работников-математиков. «За время с 1920 г. из питомцев физико-математического факультета Ростовского университета вышло 20 профессоров-докторов наук, 60 доцентов-кандидатов наук и около 200 преподавателей и ассистентов вузов» (стр. 350—351). Характеризуются главнейшие научные работы ростовских математиков, в частности сочинения Д. Д. Мордухай-Болтовского (1876—1952).

Автор в момент написания статьи — ректор Ростовского университета — считает, что «несмотря на большие успехи, которых добились математики Ростовского университета, все же уровень математической работы в нем недостаточно еще высок, особенно если учесть задачи огромной важности, стоящие перед советскими математиками. Коллективу математиков Ростовского университета, как и всем советским ученым, предстоит напряженный труд по выполнению этих задач» (стр. 352).

К. А. Рыбников

2503. Частное собрание в честь барона Шарля-Жана де-ла-Валле-Пуссена по поводу установления его бюста в Академии (Réunion intime en l'honneur du B-on Charles J. de La Vallée Poussin, à l'occasion de la remise de son buste à la Classe), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, 39, сер. 5, № 12, 1006—1012 (франц.)

В приветственной речи по поводу установления 5 декабря 1953 г. в Бельгийской академии наук бюста Валле-Пуссена в честь 50-летия его пребывания в Академии, Ф. Симонар кратко напоминает важнейшие события жизни и творчества юбиляра, приводя высказывания как самого Валле-Пуссена, так и К. Жордана, А. Лебега и других ученых. После речи Ф. Симонара с ответным словом выступил Валле-Пуссен. *И. Г. Башмакова*

2504. Георг Вега (1754—1802). Цермель (Jurij Vega (1754—1802). Cermelj Lavo), Elektrotehn. vesn., 1954, 8, № 3—4, 65—67 (словен.)

Речь профессора Лаво Цермеля на заседании Общества математиков и физиков Словении в Любляне в связи с 200-летием со дня рождения словенского математика и вычислителя доныне употребляемых во всем мире логарифмических таблиц Георга Вега. Сообщаются краткие сведения о жизни и трудах Г. Вега (более полные данные советский читатель найдет в работе референта (см. ниже реф. 2505)). В реферируемой статье упоминаются и другие словенские ученые: физики Стефан и Клеменчич и математик Хочевар; отмечается, что после Вега авторами употреблявшихся в австрийских школах учебников математики и таблиц были словенцы Мочник и Хочевар. Жизнь Г. Вега послужила материалом для первого романа в словенской литературе (писателя Якова Беденека). *И. Я. Депман*

2505. Замечательные славянские вычислители Г. Вега и Я. Ф. Кулик. Депман И. Я., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 573—608

Статья состоит из двух самостоятельных частей. Первая часть содержит краткие биографические сведения о Георге Вега (1754—1802) и обзор его трудов, главнейшим из которых являются применяемые и в наше время семизначные таблицы логарифмов. Приводится перечень литературы о Г. Вега, сообщаются данные об изданиях его таблиц.

Вторая часть представляет собой краткий очерк жизни и научной деятельности профессора Пражского университета Я. Ф. Кулика (1793—1863). Приводится библиография трудов Я. Ф. Кулика. Наибольшее внимание уделяется его трудам по теории чисел, в частности таблице простых чисел, доведенной Куликом до 100 330 201. Освещается история составления таблиц простых чисел. *К. А. Рыбников*

2506. Гвидо Гранди и основатели исчисления бесконечно малых. Тенка (Guido Grandi e i fondatori del calcolo infinitesimale. Tenca Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 2, 201—204 (итал.)

На основании изучения рукописного и печатного наследия итальянского математика Г. Гранди, бывшего в Италии первым пропагандистом нового исчисления бесконечно малых Лейбница, автор показывает, что Гранди занимал в известном споре между Лейбницем и Ньютоном о приоритете правильную позицию, признавая за обоими своими великими современниками равные права в изобретении этого исчисления. Утверждение автора, что в своих воззрениях на природу бесконечно малых Гранди отчасти предвосхитил идеи Коши, ничем не аргументировано. *А. П. Юшкевич*

2507. Вадим Евгеньевич Дьяченко. Б р е у с К., П о л о ж и й Г., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 3, 367—368

Некролог В. Е. Дьяченко (1896—1954) — украинского советского математика, члена-корреспондента Академии наук УССР, профессора Киевского университета. Приложен список трудов В. Е. Дьяченко (32 названия).

2508. Василий Иванович Костин. (Некролог). Сб. матем. отд. физ.-матем. фак. Одесского ун-та, 1953, 5, 149—150

Краткий очерк жизни, общественной и научной деятельности профессора Одесского университета В. И. Костина (1910—1953).

2509. Четыре неизданных письма Лейбница и одно письмо Г. Гранди. А г о с т и н и (Quattro lettere inedite di Leibniz e una lettera di G. Grandi. A g o s t i n i A m e d e o), Arch. internat. histoire sci., 1953, 6, № 25, 434—443 (итал., латин.)

Публикация четырех писем Лейбница к итальянскому математику Гвидо Гранди (1671—1742) и одного письма Гранди к Лейбницу, восполняющая их переписку, изданную в томе IV «Leibnizens mathematische Schriften» (1860). Письма Лейбница датированы 1.VII.1705 г., 6.VIII.1713 г., 3.III. и 14.III.1714 г.; письмо Гранди является ответом на первое из них, но даты не имеет. Все письма на латинском языке. Лейбниц знакомит Гранди с некоторыми своими работами по дифференциальному и интегральному исчислению, усовершенствованиями в алгебраической символике, воззрениями на природу бесконечно малых величин и мнимых величин; высказывается по вопросу о суммировании бесконечных рядов; дает оценку исследованиям Гранди, в частности открытым последним «родоneям» или розовидным плоским кривым (полярное уравнение $\rho = a \sin m\varphi$) и т. д. В письме Гранди дается анализ одной сообщенной ему Лейбницем задачи И. Бернулли; оно приведено не полностью.

В публикации есть опечатки. Изданы письма без каких-либо исторических комментариев, что весьма затрудняет их чтение. *А. П. Юшкевич*

2510. Эпизод из жизни академика А. А. Маркова. О т р а д н ы х Ф. П., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 495—508

Материалы переписки о поданном 12 февраля 1912 г. академиком А. А. Марковым (1856—1922) заявлении с просьбой отлучить его от церкви.
К. А. Рыбников

2511. Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876—1952). Ч е р н я е в М. П., Н е с т о р о в и ч Н. М., Л я п и н Н. М., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 4, 131—139

Краткий очерк жизни и научной деятельности Д. Д. Мордухай-Болтовского с приложением списка опубликованных работ.

2512. Уральский математик Иван Михеевич Первушин. Р а и к А. Е., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 535—572

Биографический очерк и обзор математических работ И. М. Первушина (1827—1900), в том числе неопубликованных, хранящихся в архиве Академии наук СССР.

И. М. Первушин, не являясь математиком ни по подготовке, ни по роду занятий, представил в разное время в Академию наук около двадцати математических работ по теории чисел. Среди них: таблицы простых чисел от 1 до 10 000 000; доказательства того, что число $(2^{61}-1)$ — простое, числа же $2^{2^6}+1$, $2^{2^{12}}+1$, $2^{2^{23}}+1$ — составные, и др. Для решения подобных теоретико-числовых задач И. М. Первушин разработал оригинальные методы, свидетельствующие о незаурядном математическом таланте и огромном труде вычислителя.

Более полную биографию И. М. Первушина, но без анализа его математических работ, см. Рождественская К. «Рукописный журнал математика Первушина» (Уральский современник, 1942, № 6, 140—177). *К. А. Рыбников*

2513. Димитрие Помпейю. Т е о д о р е с к у (Dimitrie Pompeiu. T e o d o r e s c u N.), Gaz mat. si fiz., 1954, **A6**, № 10, 431—432 (рум.)

Некролог румынского математика акад. Димитрие Помпейю (1873—1954). См. также РЖМат, 1954, 3178.

2514. В. И. Романовский, Изв. АН УзССР, 1954, № 5, 121—124

Некролог известного математика, специалиста в области математической статистики и теории вероятностей, действительного члена Академии наук Узбекской ССР, профессора Среднеазиатского государственного университета Всеволода Ивановича Романовского (1879—1954).

2515. О педагогической деятельности В. А. Стеклова в Харьковском технологическом институте. Б а х м у т с к а я Э. Я., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 529—534

Обзор материалов Харьковского областного архива, характеризующих деятельность академика В. А. Стеклова (1863—1926) в Харьковском технологическом институте, где он в течение 10 лет (1894—1904) читал курс теоретической механики, а также принимал участие в организации преподавания общетеоретических дисциплин. *К. А. Рыбников*

2516. В. А. Стеклов в Петербургском университете. Д е п м а н И. Я., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 509—528

Материалы о работе академика В. А. Стеклова (1863—1926) в Петербургском университете в 1906—1912 гг. Освещаются преимущественно общественно-политические взгляды и деятельность В. А. Стеклова. *К. А. Рыбников*

2517. Об одной работе П. Л. Чебышева, не вошедшей в полное собрание сочинений. Г н е д е н к о Б. В., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 215—222

Сообщается о рецензии П. Л. Чебышева «Мнение адъюнкта Императорской академии наук П. Л. Чебышева о статье полковника Веревкина» (Артилл. ж., 1856, № 6, 253—262). Приводится текст этой рецензии. В ней Чебышев критикует статью Веревкина «О начальной скорости снарядов» (Артилл. ж., 1856, № 5, 60—108; № 6, 230—253) за то, что все предложенные формулы — эмпирические, а также высказывает общие соображения о границах применимости подобных формул и о предъявляемых к ним требованиях. *К. А. Рыбников*

2518. П. Л. Чебышев и популяризация математики в России. Д а х и я С. А., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 239—244

Материалы о содействии, которое оказывал Чебышев русским популярным математическим журналам. Делается вывод, что «постоянная помощь Чебышева делу популяризации математики в России была не случайным, а органическим элементом плодотворной просветительной деятельности ученого и вытекала как из его философско-методологических взглядов на связь математики с жизнью, так и из его патриотических побуждений» (стр. 244).

К. А. Рыбников

2519. О статьях П. Л. Чебышева, М. В. Остроградского, В. Я. Буняковского и И. И. Сомова в «Энциклопедическом словаре, составленном русскими учеными и литераторами». П р у д н и к о в В. Е., Историко-матем. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 223—237

В 1861—1863 гг. в России издавался «Энциклопедический словарь, составленный русскими учеными и литераторами». Всего вышло 6 томов, после чего издание прекратилось.

Рассматриваются статьи математического характера, написанные для словаря П. Л. Чебышевым, М. В. Остроградским, В. Я. Буняковским и И. И. Сомовым. Три статьи Чебышева: «Абелева теорема», «Абелевы функции» и «Абель» воспроизводятся дословно.

Делается вывод, что упомянутые математики интересовались историей своей науки и распространением математических знаний. *К. А. Рыбников*

2520. Густав Энестрем. Х а г с т р е м (Gustaf Enestrŏm. H a g s t r o e m K.-G.), Nord. mat. tidskr., 1953, 1, № 4, 145—155, 182 (швед.; резюме англ.)

Очерк жизни и деятельности шведского историка математики, а также специалиста по страхованию Г. Энестрема (1852—1923). Автор отмечает, что Энестрем в 1893 г. опубликовал теорему, в 1912 г. вновь найденную японским математиком Какея: Если корни уравнения

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

суть действительные положительные числа и

$$m = \min \left| \frac{a_{i-1}}{a_i} \right|, \quad M = \max \left| \frac{a_{i-1}}{a_i} \right|, \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

то для всех его корней $m < z < M$.

А. П. Юшкевич

См. также: 2892

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

2521. Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп. Н о в и к о в П. С., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 6, 485—524

Цель работы — доказать неразрешимость проблемы сопряженности для групп с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений, которая заключается в следующем: найти алгоритм, позволяющий узнавать для каждых двух элементов группы, заданных в виде произведения образующих, сопряжены они или нет.

Доказывается следующая теорема: Какова бы ни была система продукций $\mathfrak{P}$, существует группа $\mathfrak{A}$ с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений такая, что каждому слову $X \in \mathfrak{P}$ можно поставить в соответствие слово $\Phi(X) \in \mathfrak{A}$, причем соответствие Φ обладает следующими свойствами:

1. Существует алгоритм, позволяющий по слову X построить слово $\Phi(X)$.

2. Если слова X и Y равны (не равны) в системе продукций $\mathfrak{P}$, то слова $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$ соответственно сопряжены (не сопряжены) в группе $\mathfrak{A}$.

При этом группа $\mathfrak{A}$ может быть эффективно построена по системе продукций $\mathfrak{P}$.

Эта теорема полностью решает проблему, так как Постом и А. А. Марковым доказано существование системы продукций, для которой нет алгоритма, позволяющего установить равенство и неравенство слов в этой системе продукций.

Автор показывает также, что из полученного им результата в геометрическом приложении вытекает следующее следствие:

Можно построить двумерный полиэдр, для которого неразрешима проблема гомотопии путей.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е н т а. На стр. 494 при определении систем проходных букв не указано, что в определяющих соотношениях

$$E_i p_j F_i = H_i p_j G_i$$

слова E_i, F_i, H_i и G_i зависят от индекса проходной буквы p_j. Эти слова следовало бы обозначить через E_i^j, F_i^j, H_i^j и G_i^j.

Требование 1) к системе проходных букв лишнее, так как оно полностью содержится в требовании 2).

На стр. 498 в формулировке леммы 2, как это видно из ее доказательства, необходимо к свойствам 1 и 2 прибавить еще следующее свойство:

3. В последовательностях преобразований

$$X_0 u p v Y_0 \to \ldots \to X_m p Y_m \qquad \text{при } \sigma = +1$$

и

$$X_0 v p^{-1} u Y_0 \to \ldots \to X_m p^{-1} Y_m \qquad \text{при } \sigma = -1$$

над рассматриваемой буквой p^σ никаких преобразований не производится. Без указания этого свойства лемма 2 стала бы тривиальной. Это свойство фигурирует уже в формулировке аналогичной леммы 2′. *С. И. Адян*

2522. Логика для математики, не содержащей отрицания. В р е д е н д ё й н (The logic of negationless mathematics. V r e d e n d u i n P. G. J.), Compositio math., 1953, 11, № 3, 204—270 (англ.)

Строится логическое исчисление (и.), в которое, следуя установке Грисса (РЖМат, 1954, 2829), вклю-

чаются только верные высказывания и которое не содержит отрицания в качестве основной операции.

Переменные (п.) обозначаются через $x, y, \ldots$, vs означает некоторую последовательность п. Элементарными формулами называются переменные предикаты $F(x)$, $G(x, y)$ и постоянные предикаты равенства $=(x, y)$ и различимости $\#(x, y)$. Вводятся знаки конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$, кванторов существования (Ev) и общности (v) и знак $\rightarrow_{vs}$.

Отправляясь от элементарных формул, индукцией определяется понятие формулы (ф.) (well formed formula): если p, q суть ф., то $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow_{vs} q$, $(Ev)\ p$, $(v)\ p$ являются также ф. Переменные связываются не только кванторами, но также и знаком $\rightarrow_{vs}$. Если vs обозначает $x, y, \ldots$, то $\exists_{vs} p$ означает $(Ex)(Ey)\ldots p$, а $(vs)\ p$ означает $(x)(y)\ldots p$; когда vs содержит все свободные переменные ф. p, вместо $\exists_{vs} p$ пишется $\exists p$.

Предикаты интерпретируются как классы; в частности, $p(x, y) \rightarrow_x q(x, y)$ означает класс тех y, для которых класс $p(x, y)$ содержится в $q(x, y)$. Понятие пустого класса не допускается; поэтому пересечение двух классов не всегда является классом.

Аксиомы «исчисления функций, не учитывающего внутреннее строение ф.» следующие (запись $\frac{P}{p}$ означает, что ф. p выводима из (конечной) последовательности ф. P):

A 2.0. $\dfrac{p \quad q}{p \wedge q}$; A 2.1. $\dfrac{p \wedge q}{p}, \dfrac{p \wedge q}{q}$;

A 3.0. $\dfrac{p \quad p \rightarrow_{vs} q}{q}$; A 3.2. $\dfrac{p}{(Ex)\ p}$;

A 3.3. $\dfrac{p \rightarrow_{vs} q}{\exists_{vs} p}, \quad \dfrac{p \rightarrow_{vs} q}{\exists_{vs} q}$;

A 3.4. Если $\dfrac{p \quad r}{q}$, то $\dfrac{\exists_{vs} p \quad r}{p \rightarrow_{vs} q}$;

здесь посылка r (которая может быть и опущена) не должна содержать свободно переменные из vs.

A 4.0. $\dfrac{p \quad \exists q}{p \vee q}$; A 4.1. $\dfrac{p \vee q}{q \vee p}$; A 4.2. $\dfrac{\exists (p \vee q)}{\exists p}$;

A 4.3. $\dfrac{p \rightarrow_{vs^r} q \rightarrow_{vs^r} r}{p \vee q \rightarrow_{vs^r} r}$;

A 4.4. $\dfrac{(p \vee q) \wedge r \quad \exists (p \wedge r) \exists (q \wedge r)}{(p \wedge r) \vee (q \wedge r)}$.

Доказывается ряд теорем, которые, как и вышеприведенные аксиомы, если вообще отличаются от обычных теорем исчисления высказываний или предикатов, то чаще всего добавочными посылками вида $\exists_{vs} p$, гарантирующими непустоту соответствующих классов.

В «общем исчислении функций» добавляются правила подстановки и аксиомы

A 5.0. $\dfrac{(x)\ p}{p}$; A 5.1. Если $\dfrac{pq}{r}$, то $\dfrac{p\,(x)\ q}{(x)\ r}$;

здесь посылка p (которая может быть и опущена) не должна содержать x свободно.

A 7. $\dfrac{(Ex)\ p}{(x)\ p}$; здесь p не должно содержать x свободно;

A 9.0. $\dfrac{x = y \quad p(x)}{p(y)}$;

здесь p не должно содержать y связанно;

A 9.1. $\dfrac{x \# z \rightarrow_z y \# z}{y = x}$;

A 9.2. $\dfrac{x \# y}{z \# x \vee z \# y}$; A 9.3. $\dfrac{x \# y}{y \# x}$.

Если x и y являются единственными свободными п. двуместного предиката $p(x, y)$, то отрицание $\sim p(x, y)$ определяется равенством

$$\sim p(x, y) =_{df} p(u, v) \rightarrow_{uv} u \# x \vee v \# y$$

и аналогично для одноместных, трехместных и т. д. предикатов. Это определение и аксиома

A 10. $\dfrac{p(x) \vee q(x) \quad p(y) \rightarrow_y y \# x}{q(y)}$, т. е. $\dfrac{p \vee q \sim p}{q}$,

позволяют доказать ряд теорем об отрицании, например

10.21. $\dfrac{\sim x \# y}{x = y}$; 10.80. $\dfrac{\sim (y = x \wedge z = x)}{y \# x \vee z \# x}$.

Кроме п., вводятся также индивидуальные постоянные (и. пос.) и соответствующие аксиомы, позволяющие подстановку и. пос. вместо п. Отказ от пустого класса вызывает семантические затруднения; так, если c — и. пос., то $p(c) \vee q(c)$ приходится понимать в том смысле, что c принадлежит сумме классов $p(x) \vee q(x)$, а не как дизъюнкцию высказываний $p(c)$ и $q(c)$, так как одно из них может быть ложным, и тогда дизъюнкция считается бессмысленной.

И. расширяется, допуская, кроме собственно п. x, y (п. нулевой степени) также и ф. $f, g, \ldots$ в качестве п. (п. первой ступени). Соответственно расширяются понятия дизъюнкции, кванторов, предикатов и ф.

Аксиомы расширенного и. в основном получаются повышением ступени из аксиом нерасширенного и. Но, например, A 9.1, которую автор отмечает как сомнительную с конструктивной точки зрения, на первой ступени не вводится, а заменяется аксиомами

9.1. $\dfrac{\exists \#_1}{(f)\ f =_1 f}$; 9.3. $\dfrac{p =_1 q}{q =_1 p}$

(индекс 1 указывает, что $=_1$ есть предикат первой ступени, т. е. предикат от предикатов). Поэтому теорема 10.21 на первой ступени недоказуема. Среди доказуемых теорем имеется

13.53. $\dfrac{\exists_{vs} \sim p}{p \vee \sim p}$,

которую автор, следуя установке Гриса, предлагает понимать так: если можно показать, что каждый элемент из p принадлежит q и каждый элемент из $\sim p$ принадлежит q, то про каждое x можно доказать, что оно принадлежит q.

Построенное и. обозначается через NC. Показывается, что и. C, которое получается из NC исключением аксиом A 3.3, A 4.2 и устранением экзистенциальных условий в остальных аксиомах, охва-

тывает и. Гильберта и Аккермана (Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, М., 1947), обозначаемое через HA, если ф. $\overline{p}$, $p \to q$ и и $(x)(f(x) \to g(x))$ из HA перевести соответственно в ф. $\sim p$, $\sim p \vee q$ и $f(x) \to_x g(x)$ из N. Наоборот, и. HA охватывает и. N, если $x = y$, $x \# y$ и $\frac{pq\ldots}{r}$ из N перевести соответственно в ф. $(f)(f(x) \to f(y))$, $\overline{(f)(f(x) \to f(y))}$ и $p \& q \& \ldots \to r$ из HA.

Автор отмечает, что некоторые теоремы «классического и. без отрицания» NC неприемлемы с конструктивной точки зрения, например 13.53. «Конструктивное и. без отрицания» NI строится из NC заменой A 9.1 на аксиомы

A 9.10. $\frac{\exists^{\pi} x = x}{}$; A 9.11. $\frac{x = y}{y = x}$.

Если построить из NI новое и. N' таким же образом, как N строилось из NC, то и. N' оказывается равносильным и. Хейтинга (Heyting A., Sitzungsber. Preus. Akad. Wiss. Phys.-Math. Klasse, 1930, 16, 42—71; 158—169).

В конце статьи и. NI сравнивается с и. Гриссa (Griss G. F. C., Proc. Koninkl nederl. akad wetensch., 1951, A54, 41—49). Возможным оказывается только частичный перевод, и то лишь после некоторого видоизменения этих исчислений.

В. К. Детловс

2523. Гриссе и его интуиционистская математика, не содержащая отрицания. Хейтинг (G. F. C. Griss and his negationless intuitionistic mathematics. Heyting A.), Synthese, 1954, 9, № 2, 91—96 (англ.)

Рассматривается точка зрения Гриссa на некоторые вопросы основания математики.

В чем смысл утверждения «Не существует квадратного круга»? Теоретико-множественное толкование «математических реалистов»: множество кругов и множество квадратов не имеют общих элементов; Брауэр и «интуиционисты» понимают это так: из предложения о существовании квадратного круга можно вывести противоречие. Грисс считает, что ясное понятие можно иметь только о том, что построено; значит, понятие о квадратном круге настолько неясно, что все утверждение не может считаться принадлежащим математике.

В концепции Гриссa важным является вопрос о положительной формулировке понятий, обычная формулировка которых содержит отрицание, например неравенства действительных чисел (д. ч.). Пусть д. ч. a определяется последовательностью $\{a_n\}$ стягивающихся рациональных интервалов. Д. ч. a и b считаются равными, если для каждого n интервалы a_n и b_n имеют общую точку. Неравенство д. ч. может быть введено как положительное понятие различия $(a \# b)$, причем a и b считаются различными, если можно (конструктивно) указать n, для которого a_n и b_n не имеют общей точки. Содержащее отрицание утверждение «если не верно, что $a \quad b$, то $a = b$» Грисс заменяет утверждением «если каждое д. ч. c, отличное от a, отлично также и от b, то $a = b$» (см. реф. 2522; аксиома A 9.1); свойство понятия различия, выражаемое этим утверждением, называется свойством E.

Для других математических объектов определение различия должно быть другое. Например, классы A и B д. ч. по Гриссу считаются различными, если A содержит элемент a, отличный от каждого элемента класса B, или B содержит элемент b, отличный от каждого элемента класса A. Это понятие различия свойством E не обладает.

Не содержащая отрицания логика Гриссa не может быть получена простым вычеркиванием из «интуиционистской» логики всех формул с отрицанием. Грисс допускает в математике только верные утверждения, поэтому приходится наложить ограничения на конъюнкцию: «a есть квадрат» и «a есть круг» являются утверждениями, но «a есть квадрат и a есть круг» — нет (ср. реф. 2522). В логике Гриссa исчисление высказываний невозможно и приходится начать с исчисления предикатов (РЖМат, 1954, 2829). Так как понятие формулы (well formed formula) зависит от интерпретации, то чисто формальная логика вообще невозможна.

Автор считает чрезмерным требование Гриссa избегать в математике всех нереализованных предложений, потому что это ведет к отказу от общих предложений: каждое общее предложение, вроде $a + b = b + a$ для д. ч., неявно содержит нереализованные, в то время как реализованными являются только $2 + 3 = 3 + 2$ и т. п. *В. К. Детловс*

2524. Рекурсивные действительные числа. Райс (Recursive real numbers. Rice H. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 784—791 (англ.)

Рекурсивно перечислимая (р. п.) последовательность рациональных чисел $\{a_n\}$ называется рекурсивно сходящейся (р. с.), если существует общерекурсивная (о. р.) функция $g(N)$ (в терминологии А. А. Маркова — регулятор сходимости) такая, что $|a_n - a_m| < 1/N$ при $n, m > g(N)$.

Автор строит алгоритм, применимый к любой паре р. п., р. с. последовательностей рациональных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таких, что $\lim a_n \neq \lim b_n$, и устанавливающий, какой из этих пределов больше. Это позволяет доказать установленную впервые Робинсоном (Robinson R. M., J. Symbolic Logic, 1951, 16, 282) попарную эквивалентность следующих четырех требований, предъявляемых к действительному числу ξ:

A. ξ есть предел р. п., р. с. последовательности рациональных чисел.

B. В двоичном разложении ξ последовательность цифр совпадает с последовательностью значений о. р. функции.

C. Множество рациональных чисел, бóльших ξ, рекурсивно.

D. ξ содержится в р. п. последовательности стягивающихся отрезков с рациональными концами.

Действительное число ξ называется рекурсивным, если оно удовлетворяет одному из условий A — D.

Основные результаты о множестве $\mathfrak{E}$ всех рекурсивных действительных чисел:

Теорема 4. $\mathfrak{E}$ является полем.

Теорема 6. $\mathfrak{E}$ (i) алгебраически замкнуто.

Теорема 4 основана на лемме: для любого $\xi \in \mathfrak{E}$, заданного условием A, можно эффективно указать рациональное b такое, что $b > \xi$; если $\xi \neq 0$, то можно эффективно указать рациональное c такое, что $0 < c < |\xi|$.

Последовательность $\{\xi_n\}$ чисел из $\mathfrak{E}$ называется р. п., если существуют о. р. функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ такие, что ξ_i есть предел последовательно-

сти рациональных чисел, пересчитываемых $f(i, y)$ с регулятором сходимости $g(i, y)$; понятие о рекурсивной сходимости обобщается на случай последовательностей из $\mathfrak{E}$.

Теорема 6 основана на том, что предел р. п., р. с. последовательности чисел из $\mathfrak{E}$ принадлежит $\mathfrak{E}$.

Б. А. Трахтенброт

2525. Метаматематика (общедоступное изложение). Де-Сьюа (Metamathematics: A non-technical exposition. De Sua Frank C.), Amer. Scientist, 1954, **42**, № 3, 488—495 (англ.)

Популярное изложение основных этапов в развитии математической логики, связанных с рассмотрением вопросов оснований математики.

Т. Л. Майстрова

2526. Теорема о гиперпростых множествах. Деккер (A theorem on hypersimple sets. Dekker J. C. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 5, 791—796 (англ.)

В работе Поста (Post E. L., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, № 5, 284—316) устанавливается, что креативное множество не сводимо таблично к гиперпростому, и оставляется открытым вопрос о том, возможна ли тюрингова сводимость (T-сводимость) креативного множества к гиперпростому. В рассматриваемой работе этот вопрос решается положительно.

Теорема 1. Каково бы ни было рекурсивно перечислимое (р. п.) множество α, не являющееся рекурсивным, можно эффективно построить р. п. множество β, удовлетворяющее условиям: 1) β — гиперпростое множество; 2) β таблично сводится к α; 3) α T-сводится к β.

Гиперпростое множество β строится исходя из (1—1)-рекурсивной функции $a(n)$, пересчитывающей α. Именно:

$$n \in \beta \equiv (\mathrm{E}\nu)\,[\nu > n \,\&\, a(\nu) > a(n)].$$

Посредством общерекурсивных схем над предикатом $n \in \beta$ строится функция $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \mu n\,[a(n) > x \,\&\, n \overline{\in} \beta],$$

которая определена для всех x в силу того, что дополнение к β бесконечно, а $a(n)$ становится больше x, начиная с некоторого номера. Утверждение 3) теоремы вытекает из того, что в определении множества α можно заменить неограниченный квантор на квантор, ограниченный функцией $\varphi(x)$, т. е.

$$x \in \alpha \equiv (\mathrm{E}n)\,[x = a(n)] \equiv (\mathrm{E}n)\,[n < \varphi(x) \,\&\, x = a(n)].$$

Для обобщения теоремы 1 определяются множества β_k $(k = 1, 2 \ldots)$:

$$n \in \beta_k \equiv (\mathrm{E}\nu_1, \ldots, \nu_k)\,[\nu_1 > n \,\&\, \nu_2 > \nu_1 \,\&\, \ldots \nu_k > \nu_{k-1} \,\&\, a(\nu_1) > n \,\&\, \ldots \,\&\, a(\nu_k) > n].$$

Теорема 2. Пусть $a(n)$ есть (1—1)-рекурсивная функция, пересчитывающая множество α, не являющееся рекурсивным. В таком случае, при любом натуральном k: 1) β_k — гиперпростое множество; 2) β_k таблично сводится к α; 3) α T-сводится к β_k.

Б. А. Трахтенброт

2527 РЕЦ. Развитие научной философии. Рейхенбах (The rise of scientific philosophy. Reichenbach Hans. XI+333 p., London, Cambridge University Press, Berkeley and Los Angelos, University of California Press, 1951, 3.75 doll.) [**Рецензия: Грюнбаум** (Grünbaum Adolf), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 48—54 (англ.)]

Грюнбаум возражает против того, что Рейхенбах (известный представитель «венского» кружка позитивистов), хотя и не называя себя лично, фактически провозглашает научной философией (все остальное объявляя ошибочным) только свои собственные взгляды (не упоминаются даже разногласия среди членов того же «кружка»). К философским вопросам математики, затрагиваемым в рецензии, относится попытка Рейхенбаха избежать трудностей, связанных с конвенционализмом Пуанкаре, посредством введения понятия «натуральной геометрии». Точку зрения Рейхенбаха Грюнбаум толкует так:

Правильное описание действительности дается не отдельно взятой геометрией, а совокупностью, состоящей из некоторой геометрии и соответствующих утверждений о поведении твердых тел и лучей света. В классе эквивалентных систем, дающих правильное описание действительности, «нормальной системой» объявляется такая, в которой твердые тела и лучи света не предполагаются «деформируемыми» универсальными силами. Геометрия нормальной системы называется «натуральной геометрией». Эта геометрия не является вопросом соглашения и может быть установлена только эмпирически, поскольку две разные нормальные системы соответствовали бы объективно различным физическим мирам.

С. А. Яновская

См. также: 2596, 2597, 2620

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

2528. Кватернарные квадратичные формы и гипотеза Римана для Z-функций. Эйхлер (Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion. Eichler Martin), Arch. Math., 1954, **5**, № 4—6, 355—366 (нем.)

Пусть $F(x_i)$ — кватернарная положительно определенная квадратичная форма с целыми рациональными коэффициентами, взаимно простыми в своей совокупности. Дискриминант формы равен D. Оценивается число представлений $a_F(n)$ натурального числа n формой $F(x_i)$.

Рассматривается группа $\mathfrak{G}(Q)$, состоящая из преобразований

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

где целые числа a, b, c, d определяются по $\bmod Q$, $c \equiv 0 \pmod Q$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$ (в Q содержатся все про-

стые делители D и только они). Относительно группы $\mathfrak{G}(Q)$ функция

$$\vartheta_F(\tau)=\sum_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty}\exp[2\pi i\tau F(x_i)]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_F(n)\exp[2\pi in\tau]$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\vartheta_F\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\chi(a)(c\tau+d)^2\vartheta_F(\tau)\quad\text{с}\quad\chi(a)=(D/a).$$

Функция $\vartheta_F(\tau)$ представима суммой ряда Эйзенштейна $E_F(\tau)$ и формы $S_F(\tau)$. Соответственно этому $\alpha_F(n)=\varepsilon_F(n)+\sigma_F(n)$. Главный член $\varepsilon_F(n)$ выражает среднее число представлений числа n формами рода, определяемого формой $F(x_i)$.

Главный член может быть вычислен с помощью основной теоремы Зигеля из аналитической теории квадратичных форм. Если $(n, D)=1$, то $\varepsilon_F(n)=c_F n\times$ $\times\sum_{t/n}(D/t)\,t^{-1}$, где константа c_F не зависит от n. Для остаточного члена выводится оценка $|\sigma_F(n)|<\gamma_F(\varepsilon)\,n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, где ε — произвольно малое положительное число и $\gamma_F(\varepsilon)$ — константа, зависящая только от F и ε. Для простого числа p $|\sigma_F(p)|<\gamma_F p^{1/2}$. Доказательство этих оценок основано на арифметической теории алгебраических соответствий Дейринга (Deuring M., J. reine und angew. Math., 1937, **177**, 161—191; 1940, **183**, 25—36) и на использовании гипотезы Римана для Z-функции $\zeta_{K(p)}(s)$ для некоторого поля $K(p)$ модулярных функций над конечным полем констант.

Показывается, что произведение $\Pi_p[\zeta_{K(p)}(s)]^{-1}$, распространенное на почти все простые числа, является мероморфной функцией, удовлетворяющей функциональному уравнению обычного вида с гамма-множителями. *Б. М. Бредихин*

2529. Об одном обобщении эйлеровой сумматорной формулы и ее приложении к вопросам аналитической теории чисел. Мюллер (Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Summenformel und ihre Anwendung auf Fragen der analytischen Zahlentheorie. Müller Claus), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1954, **19**, № 1—2, 41—62 (нем.)

Пусть Ω — двумерная решетка, точки которой обозначим через $\mathfrak{g}$. В этом поле рассматривается основная функция $G(0;\mathfrak{x})$, обладающая свойствами: 1) $G(0;\mathfrak{x}+\mathfrak{g})=G(0;\mathfrak{x})$ для всех $\mathfrak{g}\in\Omega$ и $\mathfrak{x}\neq\mathfrak{g}$; 2) $\Delta G(0;\mathfrak{x})=1/\sqrt{g}$ для $\mathfrak{x}\neq\mathfrak{g}$; 3) сумма $G(0;\mathfrak{x})+$ $+(2\pi)^{-1}\log|\mathfrak{x}|$ есть функция непрерывная и дифференцируемая; 4) $\int_{\mathfrak{F}}G(0;\mathfrak{x})\,dF=0$, где $\mathfrak{F}$ есть главная область поля Ω; $\mathfrak{x}=x^1\mathfrak{e}_1+x^2\mathfrak{e}_2$, $\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+$ $+\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2$; и разлагающаяся в ряд Фурье

$$G(0;\mathfrak{x})=-\frac{1}{2\pi}\log|\mathfrak{x}|+\frac{|\mathfrak{x}|^2}{4\sqrt{g}}+a_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),$$

где для постоянной a_0 устанавливается с помощью преобразования Θ-функций формула

$$a_0(\Omega)=-\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g_{11}}}\left|\Theta\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\pi i/12\tau}\right|^2\right),$$

$$\Theta(\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i\tau n}).$$

С помощью основных свойств функции Грина автор устанавливает обобщенную формулу Эйлера

$$\sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}}f(\mathfrak{g})-\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}}f(\mathfrak{g})=\frac{1}{\sqrt{g}}\int_{\mathfrak{G}}f(\mathfrak{x})\,dF-$$

$$-\int_{\mathfrak{G}}G(0;\mathfrak{x})\,\Delta f(\mathfrak{x})\,dF+$$

$$+\int_{\mathfrak{G}}\left(\frac{\partial f}{\partial n}G(0;\mathfrak{x})-f\frac{\partial G(0;\mathfrak{x})}{\partial n}\right)ds$$

и дает ее приложения: 1) к выводу функционального уравнения для Эпштейновской дзета-функции

$$\zeta(s;\Omega)=\sum_{|\mathfrak{g}|>0}\frac{1}{|\mathfrak{g}|^s},\quad\mathrm{Re}(s)>2;$$

2) к установлению предельной формулы Кронекера

$$\lim_{s\to 2}\left(\zeta(s;\Omega)-\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{s-2}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}(\log\pi+C+$$

$$+2\pi a_0(\Omega)-\log\sqrt{g});$$

3) к доказательству тождества Харди — Ландау

$$\sum_{|\mathfrak{g}|\leqslant R}{}'1=\frac{\pi}{\sqrt{g}}R^2+R\sum_{|\mathfrak{b}|>0}\frac{J_1(2\pi R|\mathfrak{b}|)}{|\mathfrak{b}|},$$

где $\mathfrak{b}$ означает точки «взаимной» к Ω решетки Ω^{-1}, а J_1 есть функция Бесселя первого рода и первого порядка. *Н. С. Кошляков*

2530. Об одной формуле аналитической теории чисел. Мюллер (Eine Formel der analytischen Zahlentheorie. Müller Claus), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1954, **19**, № 1—2, 62—65 (нем.)

Автор дает применение ранее установленной им сумматорной формулы для сумм вида $\Sigma\Sigma f(x, y)$, распространенной по координатам целочисленных точек, лежащих внутри круга радиуса R.

Для этой цели он рассматривает основную функцию $G(0;\mathfrak{x})$, удовлетворяющую уравнению $\Delta G(0;\mathfrak{x})=1$ и представимую рядом Фурье

$$G(0;\mathfrak{x})=-\frac{1}{2\pi}\log r+\frac{r^2}{4}+a_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),$$

где a_0 означает постоянную, определяемую с помощью преобразования Θ-функций и равную

$$a_0 = -(2\pi)^{-1}\log(\pi^{-1/2}\Gamma^2(1/4)/2).$$

Рассматривая предельный случай своей сумматорной формулы

$$\sum_{1\leqslant n^2+m^2\leqslant R^2}(\log\sqrt{n^2+m^2}-\log R) = 2\pi\int_\rho^R r(\log r-\log R)\,dr +$$

$$+\frac{1}{R}\int_{|\xi|=R} G(0;\xi)\,ds+(\log\rho-\log R)\times$$

$$\times\int_{|\xi|=\rho}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds-\frac{1}{\rho}\int_{|\xi|=\rho}G\,ds,\qquad 0<\rho<1,$$

при $\rho\to 0$, автор получает соотношение

$$\sum_{1\leqslant n^2+m^2\leqslant R^2}(\log\sqrt{n^2+m^2}-\log R) = -\frac{\pi}{2}R^2+$$

$$+\frac{1}{R}\int_{|\xi|=R}G(0;\xi)\,ds+\log R-2\pi a_0,$$

откуда следует окончательный результат:

$$\prod_{n=1}^{N}(n/N)^{r(n)} = (4\pi)^{-1}\Gamma^4(1/4)\,Ne^{-\pi N}(1+O(N^{-1/4})),$$

где $r(n)=\sum_{k^2+l^2=n}1$. *Н. С. Кошляков*

2531. Попытка систематизации методов, касающихся простых чисел. Шевалье (Essai de systématisation des méthodes concernant les nombres premiers. Chevallier J.-M.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, № 3—4, 125—140 (франц.)

Продолжение и развитие другой работы автора (Rev. gén sci., 1950, **57**, № 5—6, 102—106).

С помощью особой алгебры числовых пар устанавливается ряд тождеств, представляющих соотношения между суммами, распространенными на все целые числа в заданных пределах, и суммами, члены которых зависят только от простых чисел, заключенных в тех же пределах. Рассматриваются также суммы, содержащие значения функции Мёбиуса $\mu(n)$.

Вопрос изложен в очень общей символической форме, причем автор привлекает (во всяком случае, формально) такие средства, как интеграл Стилтьеса, интегральные уравнения и т. п. Тем не менее, результаты являются вполне элементарными и известными; они могут быть выведены прямо из простых арифметических соображений, а частью являются очевидными тождествами, связанными со свойствами символа $[x]$ (целая часть x). Так, например, автор выражает через суммы, содержащие значения функции $[x]$, такие выражения, как

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n),\quad f(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(\sqrt{x})+\frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x})+\cdots$$

и т. п. К числу подобных соотношений принадлежит и известное выражение $\log\Gamma(x+1)$ через логарифмы простых чисел, не превосходящих x (x — целое).

В статье с полным основанием выражено мнение, что все подобные тождества равноценны в смысле возможностей приложения к теории простых чисел. После опубликования рукописного наследия Г. Ф. Вороного стало известно, что Вороной уже в 1901 г. обладал общим способом вывода таких соотношений (Собрание сочинений, т. III, Киев, 1953, стр. 23—26; см. также примечания Ю. В. Линника там же на стр. 208—209). Этими же тождествами занимались В. Брун, А. И. Попов (Попов А. И., Докл. АН СССР, 1935, **2**, № 3—4, 194—196) и др. Следует сказать, что заглавие работы Шевалье не вполне соответствует ее содержанию, так как в ней не содержится рассмотрения глубоких вопросов, связанных с распределением корней функции Римана $\zeta(s)$.

А. И. Попов

2532. Конечный аналог проблемы Гольдбаха. Коэн (A finite analogue of the Goldbach problem. Cohen Eckford), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 3, 478—483 (англ.)

Пусть m — целое >1, R_m — кольцо вычетов по модулю m.

Рассматривается вопрос о представлении каждого элемента из R_m в виде суммы одного и того же числа $G(m)$ примитивных элементов кольца R_m, а также в виде суммы не более $H(m)$ таких слагаемых. Пусть g есть минимум $G(m)$. Доказываются:

Теорема 1. Для того чтобы существовало число $G(m)$ такое, что каждый элемент из R_m представим в виде суммы $G(m)$ примитивных слагаемых из R_m, необходимо и достаточно, чтобы m имело не меньше двух простых делителей. Для таких m $g=2$, если m нечетно, $g=3$, если m четно и имеет не меньше двух различных нечетных простых делителей или если m есть удвоенная степень нечетного простого, и $g=4$, если $m=2^\mu p^\lambda$, где $\mu>1$, $\lambda\geqslant 1$ и p — простое нечетное.

Теорема 2. Всякое число из R_m представимо в виде суммы не более трех примитивных из R_m тогда и только тогда, когда m имеет не меньше двух различных простых делителей. Каждое число из R_m есть сумма не более двух примитивных из R_m в том и только в том случае, если m нечетно и имеет не меньше двух различных простых делителей или если $m=2^\mu p$, $\mu\geqslant 1$ и p — нечетное простое.

Доказательство опирается на исследование числа решений сравнений

$$n\equiv a_1x_1+\cdots+a_sx_s\pmod{q^\mu},$$

где n — элемент кольца R_m, q — простой делитель m, $a_1,\ldots,a_t$ $(t\geqslant 1)$ — целые взаимно простые с q, $a_{t+1},\ldots,a_s$ $(s\geqslant t)$ — целые, делящиеся на q, проведенное автором ранее (Duke Math. J., 1952, **19**, 115—129).

В заключение формулируются еще четыре теоремы, которые могут быть доказаны тем же методом, например, теорема: Если $m=2^\mu p^\lambda$ $(\mu\geqslant 2)$, p — нечетное простое, то число n кольца R_m не может быть представлено в виде суммы трех примитивных из R_m тогда и только тогда, когда $n=2^a p^b\xi$, где $a\geqslant 2$, $b\geqslant 1$, $(\xi, m)=1$. *Г. В. Емельянов*

2533. Заметка о разбиениях. Мозер (A remark on partitions. Moser Leo), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 107—108 (англ.)

Доказывается, что если для натурального числа n рассмотреть все различные его разбиения на натуральные слагаемые и из каждого разбиения образовать произведение

$$p = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} \cdot n_1! \, n_2! \dots n_r!,$$

где n_1 — число слагаемых p_1, n_2 — число слагаемых p_2 и т. д., то сумма дробей, обратных всем произведениям p, равна 1 для любого натурального n. Так, например, для числа 6 имеем

$$\frac{1}{1^6 \cdot 6!} + \frac{1}{1^4 \cdot 2 \cdot 4!} + \frac{1}{1^3 \cdot 3 \cdot 3!} + \frac{1}{1^2 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 2! 2!} + \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3^2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{6} = 1.$$

Б. А. Кордемский

2534. Изложение теории алгебраических чисел. Сколем (Una exposicion de la teoria de los numeros algebraicos. Skolem Th.), Gac. mat., 1954, **6**, сер. 1, № 1—2, 19—31 (исп.)

Статья содержит изложение основных фактов элементарной теории алгебраических чисел.

§ 1. Алгебраические расширения поля рациональных чисел. Алгебраические числа. § 2. Модули. Базис модуля. Идеалы модуля. § 3. Теория делимости в ассоциативной и коммутативной полугруппе с единицей и правилом сокращения множителей. § 4. Поля с алгоритмом Евклида. Классы идеалов.

И. П. Кубилюс

2535. Изложение теории алгебраических чисел. Сколем (Una exposicion de la teoria de los numeros algebraicos. Skolem Th.), Gac. mat., 1954, **6**, сер. 1, № 3—4, 71—84 (исп.)

Окончание статьи (см. реф. 2534).

§ 5. Конечность числа классов идеалов. Арифметика идеалов. Теорема о норме идеала. § 6. Теория единиц.

И. П. Кубилюс

2536. Относительно квадратичные числовые поля, число классов идеалов которых делится на заданное нечетное простое число. Гут (Relativquadratische Zahlkörper, deren Klassenzahl durch eine vorgegebene ungerade Primzahl teilbar ist. Gut Max), Comment. math. helv., 1954, **28**, № 3, 270—272; № 4, 273—277 (нем.)

Пусть p — нечетное простое число, $\zeta = \exp(2\pi i/p)$, k — алгебраическое числовое поле, содержащее ζ. Предполагается, что среди простых идеалов поля k, делящих p, существует идеал, абсолютная степень которого равна 1. Доказывается, что над полем k существует бесконечно много квадратичных расширений K, число классов идеалов которых делится на p. Такими расширениями являются поля $K = k(u)$, $u^2 - [(1-\zeta)^{2p}\gamma + 2]u + 1 = 0$, где γ — нечетное целое рациональное число, большее 1, свободное от квадратов, взаимно простое с дискриминантом поля k и являющееся квадратичным вычетом mod p. При этом $K\left(\sqrt[p]{u}\right)$ является неразветвленным расширением (гильбертовым полем классов) степени p над K.

З. И. Боревич

2537. Применение принципа переноса Главка. Олива (Eine Anwendung des Übertragungsprinzipes von Hlawka. Oliwa Godfried), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953, **90**, № 1—15, 239—242 (нем.)

Из теоремы Чеботарева (Чеботарев Н. Г., Собр. соч., т. 1, М.—Л., 1949, 219—221) и теоремы Главка (Hlawka, Math. Ann., 1952, **125**, 183—207) легко выводится следующая теорема:

Пусть $A, m_0, \dots, m_n, a_0, \dots, a_n$ — целые рациональные числа и сравнения $Ay_i \equiv a_i \pmod{m_i}$ имеют нетривиальные решения. Тогда неравенство

$$|(\xi_1 z_0 - z_1)(\xi_2 z_0 - z_2) \dots (\xi_n z_0 - z_n)| \leqslant \gamma |z_0|^{-1},$$

где $\gamma \geqslant 2^{-(n+1)/2} \prod_{i=0}^{n} m_i$, имеет нетривиальное решение в z_i такое, что $Az_i \equiv a_i \pmod{m_i}$.

В конце статьи отмечается, что, используя другую теорему Главка, можно аналогичным образом получить для $n = 1$ обобщение этой теоремы на случай, когда m_0 и m_1 — идеалы в $K(i)$.

В. Д. Подсыпанин

2538. Метрическая характеристика фундаментальной области для модулярной группы Гильберта. Герман (Eine metrische Charakterisierung eines Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppen. Herrmann Oskar), Math. Z., 1954, **60**, № 2, 148—155 (нем.)

Пусть K — фиксированное абсолютно вещественное поле алгебраических чисел степени n. H — произведение n верхних полуплоскостей. Рассмотрим группу Γ всех матриц второго порядка, элементы которых — целые числа поля K, а определитель — абсолютно положительная единица. Сопоставим каждой матрице $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ преобразование в H

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \to \tau' = (\tau_1', \dots, \tau_n'),$$

$$\tau_s' = \frac{\alpha^{(s)}\tau_s + \beta^{(s)}}{\gamma^{(s)}\tau_s + \delta^{(s)}}, \qquad (1)$$

где $\alpha^{(s)}, \dots, \delta^{(s)}$ — соответственно s-сопряженные к $\alpha, \dots, \delta$.

Группа преобразований (1) называется в литературе гильбертовой модулярной группой. Если число классов поля K равно единице, то существуют положительные числа x_0 и y_0 такие, что фундаментальная область для гильбертовой модулярной группы целиком содержится в области

$$|\operatorname{Re}\tau_s| \leqslant x_0, \quad |\operatorname{Im}\tau_s| \geqslant y_0, \quad s = 1, \dots, n. \qquad (2)$$

Блументаль (Blumenthal O., Math. Ann., 1903, **56**, 509—548) ошибочно предполагал, что такое же положение имеет место для любого поля K.

Обозначим множество точек H, выделенное неравенствами (2), через $H_{x_0 y_0}$. Основной результат, полученный в статье, заключается в следующем:

Пусть h — число классов поля K. Существует h матриц $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$, таких, что фундаментальная область целиком содержится в

множестве

$$\sum SH_{x_0y_0},$$

где x_0 и y_0 — некоторые положительные числа. Обойтись меньшим, чем h, числом матриц S нельзя. Библиография, 5 названий.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2539. **Об алгебраическом числовом поле со слабым дефектом единиц.** Ремак (Über algebraische Zahlkörper mit schwachem Einheitsdefekt. Remak Robert), Compositio math., 1954, **12**, № 1, 35—80 (нем.)

Алгебраическое числовое поле K называется полем с дефектом единиц, если число основных единиц поля K совпадает с числом основных единиц некоторого собственного подполя K_0. Легко видеть, что это имеет место тогда и только тогда, если K — чисто мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля K_0. Дефект единиц называется сильным, если все единицы поля K содержатся в K_0, в противном случае — слабым.

В предшествующей работе (Compositio math., 1952, **10**, № 3, 245—285) автор получил для дискриминанта D алгебраического числового поля K без дефекта единиц следующую оценку:

$$\log|D| \leqslant n\log n + \frac{|R|}{R_{\min}}\log\frac{2n(n-1)}{k+1} / g^{(k-1)/2}, \quad (1)$$

где n — степень K, $n = r + 2s$, $k = r + s - 1$ — число основных единиц поля K, $g = (k+5+\sqrt{k^2+2k+17})/2$, R — регулятор поля K, $R_{\min}$ — некоторая нижняя граница для $|R|$, зависящая лишь от n и r. Там же установлено, что для полей с сильным дефектом единиц не существует оценки вида $|D| \leqslant f(|R|, n)$.

В реферируемой работе устанавливается, что оценка (1) остается справедливой и для полей со слабым дефектом единиц. Показывается далее, что для данного вполне вещественного поля K_0 существует только конечное число квадратичных расширений со слабым дефектом единиц. Например, если K_0 — поле рациональных чисел, то только $K_0(i)$ и $K_0(i\sqrt{3})$ имеют слабый дефект единиц (все остальные мнимые квадратичные поля имеют сильный дефект единиц).

З. И. Боревич

2540. **Число классов мнимого квадратичного поля.** Карлиц (The class number of an imaginary quadratic field. Carlitz L.), Comment. math. helv., 1953, **27**, № 4, 338—345 (англ.)

Пусть квадратичный дискриминант $d<-4$ и $h(d)$ — число классов идеалов поля $R(\sqrt{d})$. Пусть $d \equiv 0 \pmod p$, где p — нечетное простое число, $d = (-1)^{(p-1)/2}pq_0$, $q = |q_0|$, (q_0/s) — символ Кронекера, $n \geqslant 0$, $B_k(x)$ — многочлен Бернулли степени k, $= \frac{1}{2}(p-1)p^n + 1$, $c = 1 + \frac{1}{2}p^n$ для $n \geqslant 1$ и $c = 2$ для $n = 0$. Доказываются сравнения:

$$h(d) \equiv -2c\left(\frac{q}{p}\right)\sum_{1\leqslant s<q/2}\left(\frac{q_0}{s}\right)B_k\left(\frac{s}{q}\right) \pmod{p^{n+1}}, \quad (1)$$

$$h(-p) \equiv E_k \pmod{p^n}. \quad (2)$$

Из (2) при $n = 1$ следует, что

$$h(-p) \equiv -2B_{(p+1)/2} \pmod p. \quad (3)$$

Примечание референта. Сравнение (3) было впервые доказано Коши (Cauchy A., Mém. Inst. France, 1840, **17**, 445). Сравнение (1) для $n = 0$ и его аналог для $d > 0$ были ранее получены референтом, причем не только для $d \equiv 0 \pmod p$, но и для $d \not\equiv \pmod p$ (Киселев А. А., Научная сессия ЛГУ, секция матем. наук, 1948, 37—39; Докл. АН СССР, 1948, **61**, № 5, 777—779; Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1949, **16**, 20—31).

А. А. Киселев

2541. **Коэффициенты некоторых целых модулярных форм.** Ранкин, Рашфорт (The coefficients of certain integral modular forms. Rankin R. A., Rushforth J. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 2, 305—308 (англ.)

Известно, что пространство всех модулярных форм четного веса k, регулярных на бесконечности, допускает базис следующего вида:

$$f_k^{(j)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_k^{(j)}(n)\,e^{2\pi inz} \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

где

$$\lambda_k^{(j)}(n_1)\lambda_k^{(j)}(n_2) = \lambda_k^{(j)}(n_1n_2) \text{ для } (n_1, n_2) = 1,$$
$$\lambda_k^{(j)}(p^{r+1}) = \lambda_k^{(j)}(p)\lambda_k^{(j)}(p^r) - p^{k-1}\lambda_k^{(j)}(p^{r-1}),$$

коэффициенты $\lambda_k^{(j)}$ — вещественно алгебраические числа.

Целью работы является доказательство того факта, что $\lambda_k^{(j)}(n)$ — целые алгебраические числа. Это утверждение, очевидно, тривиально, когда $m = 1$, т. е. $k = 12$, 16, 18, 20, 22 и 26. Точная формулировка полученного результата заключается в следующем:

Пусть $m > 1$, $p_1, \ldots, p_\nu$ — простые, не превосходящие m. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ коэффициенты $\lambda_k^{(i)}(n)$ — целые алгебраические, принадлежащие полю $K_k^{(i)}$ степени $\delta_k^{(i)}$, причем $\delta_k^{(i)} \leqslant m^\nu$. Если же для некоторого i существует такое положительное N, что $\lambda_k^{(j)}(N) \neq \lambda_k^{(i)}(N)$ для всех $j \neq i$, то для этого значения i $\delta_k^{(i)} \leqslant m$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2542. **О трансцендентных p-адических числах. I.** Гюнтер (Über transzendente p-adische Zahlen. I. Günther Alfred), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 3—4, 155—166 (нем.)

Пусть $\mathfrak{p}$ — некоторый простой идеал, делящий целое рациональное простое число p. p-адическая функция $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu/\nu!$, где коэффициенты a_ν — целые p-адические числа, называется H-функцией. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — базис кольца целых чисел алгебраического поля K степени s, $\alpha = \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma\omega_\sigma$, где a_σ — целые рациональные числа;

$$\|\alpha\| = \max_{1\leqslant\sigma\leqslant s}\{|a_\sigma|\}.$$

Основная теорема 1. Даны n H-функций $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ и последовательность целых p-ади-

ческих чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots$, причем $|\xi_m|_p \leqslant p^{-s}$ для $m=1,2,3,\ldots$ и $\lim_{m\to\infty} |\xi_m|_p = 0$. Различные среди чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ обозначаются $x_0^{(m)} = x_0, \ldots, x_k^{(m)} = x_k$, а кратность числа x_k среди чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — символом $l_\varkappa^{(m)} + 1 = l_\varkappa + 1$ и предполагается, что $\overline{\lim_{m\to\infty}} \log l/\log m < 1$, где $l = \max_{0\leqslant\varkappa\leqslant k} l_\varkappa$, и что для любого m выражения $f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa)$ $(\lambda = 0,1,\ldots, l_\varkappa;\ \varkappa = 0,1,\ldots,k;\ \nu = 1,\ldots,n)$ являются алгебраическими числами поля K степени s. Символами $H_\nu(x_\varkappa)$ $(\varkappa = 0,1,\ldots,k;\ \nu = 1,2,\ldots,n)$ обозначаются такие наименьшие положительные целые рациональные числа, что произведения $H_\nu(x_\varkappa) f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa)$ являются целыми алгебраическими числами поля K. Пусть $M_\nu(l_\varkappa, k) = \max_{0\leqslant\lambda\leqslant l_\varkappa} \{\| f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa)\|, H_\nu(x_\varkappa)\}$, $\nu = 1,2,\ldots,n$. Тогда, если $\overline{\lim_{m\to\infty}} \log\log M_\nu(l_\varkappa, k)/\log m \leqslant \eta_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ и $\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n < n-1$, то функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ алгебраически зависимы.

Эта теорема является p-адическим аналогом теоремы Шнейдера (Schneider T., Math. Ann., 1949, **121**, 131—140). Применением основной теоремы к конкретным H-функциям доказывается еще три теоремы.

Теорема 2. Если α — p-адическое число и $0 < |\alpha|_p < p^{-1/(p-1)}$, то хотя бы одно из двух чисел α и e^α будет трансцендентным.

Теорема 3. Если $\alpha \neq 0,1$ — p-адическое число, причем $|\alpha - 1|_p < p^{-1/(p-1)}$, а β — иррациональное целое p-адическое число, то хотя бы одно из трех чисел α, β и α^β будет трансцендентным.

Теорема 4. Если α — p-адическое число и $0 < |\alpha|_p < p^{-1/(p-1)}$, то хотя бы одно из двух чисел α и $\sin\alpha$ (или α и $\cos\alpha$) будет трансцендентным.

Теоремы 2 и 3 являются обобщениями теорем Малера (Mahler K., J. reine und angew. Math., 1932, **169**, 61—66; Compositio math., 1935, **2**, 259—275) и Велдкампа (Veldkamp G. R., J. London Mat. Soc., 1940, **15**, 183—192).

Примечание референта. Символ $\| f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa)\|$, встречающийся в формулировке и доказательстве теоремы 1 (основная теорема), следует заменить символом $\| f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa) H_\nu(x_\varkappa)\|$, а величину $M_\nu(l_\varkappa, k)$ определить как

$$M_\nu(l_\varkappa, k) = \max_{0\leqslant\lambda\leqslant l_\varkappa} \{\| f_\nu^{(\lambda)}(x_\varkappa)\, H_\nu(x_\varkappa)\|, H_\nu(x_\varkappa)\}.$$

Н. И. Фельдман

2543. Пары квадратичных уравнений в конечном поле. Карлиц (Pairs of quadratic equations in a finite field. Carlitz L.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 137—154 (англ.)

Пусть $Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма с коэффициентами из конечного поля $GF(q)$, q — нечетное. Известно, что если $\delta \neq 0$ — дискриминант Q, то число решений уравнений $Q(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \alpha$, $\xi_i \in GF(q)$, дается формулами:

$$q^{2s} + q^s \psi((-1)^s \delta\alpha) \quad (r = 2s+1), \qquad (1)$$

$$q^{2s-1} + q^{s-1}\psi((-1)^s\delta)\, k(\alpha) \quad (r = 2s), \qquad (2)$$

где $\psi(\alpha) = 0, +1, -1$, если соответственно $\alpha = 0$, α — квадрат, α не является квадратом в поле $GF(q)$, и $k(0) = q-1$, $k(\alpha) = -1$ для $\alpha \neq 0$.

Рассматриваются системы вида

$$Q_1(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \alpha,$$
$$Q_2(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \beta,$$

где Q_1, Q_2 — произвольные квадратичные формы.

Ставится вопрос о числе решений $N = N(\alpha, \beta)$ системы

$$Q_1(\xi^{(1)}) + \ldots + Q_r(\xi^{(r)}) = \alpha,$$
$$\beta_1 Q_1(\xi^{(1)}) + \ldots + \beta_r Q_r(\xi^{(r)}) = \beta, \qquad (3)$$

где $Q_1, \ldots, Q_r$ — неособенные квадратичные формы с коэффициентами из поля $GF(q)$, рассматриваемые для несовпадающих систем неизвестных; $\beta_1, \ldots, \beta_r$ — различные, α, β — произвольные числа из $GF(q)$; $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_{s_i}^{(i)})$.

Число всех неизвестных системы равно $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_r$. Предполагается, что $r \geqslant 3$, так как $r = 1$ — тривиальный случай, $r = 2$ — приводит к формулам (1) и (2).

Теорема 1 устанавливает формулу для числа решений системы (3) в случае, когда все s_i четные

$$q^2 N(\alpha, \beta) = q^s + \tau\psi((-1)^{s/2}) q^{s/2} \Big\{ \sum_{i=1}^{r} (\psi((-1)^{s_i/2}\delta_i) \times$$
$$\times q^{s_i/2} - 1) k(\beta - \alpha\beta_i) + k(\alpha) k(\beta) + k(\alpha) + k(\beta) \Big\},$$

где δ_i — дискриминанты Q_i, $\tau = \prod_i \psi(\delta_i)$, $k(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ имеют прежние значения.

В теоремах 3—6 рассмотрен общий случай системы (3), когда $s_1, \ldots, s_t$ — нечетные, $s_{t+1}, \ldots, s_r$ — четные числа.

Далее показано, что в некоторых случаях число решений системы выражается через сумму вида

$$\sum_\lambda \psi((\lambda - \beta_1)\ldots(\lambda - \beta_t)),\ \lambda \in GF(q) \quad (s_1, \ldots, s_t \text{ — нечетные, } s_{t+1}, \ldots, s_r \text{ — четные числа}).$$

В конце статьи рассмотрен случай $q = 2^n$.

Э. Е. Симакова

2544. Примечание к новой статье. Вейль (Footnote to a recent paper. Weil André), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 2, 347—350 (англ.)

Отмечается, что результаты Карлица (см. реф. 2543) могут быть более кратко получены тем же методом.

Указывается, что этот же метод может быть применен к любому числу однородных квадратичных уравнений $F_1 = \cdots = F_r = 0$, если квадратичные формы $F_1, \ldots, F_r$ содержат только квадраты переменных.

Э. Е. Симакова

2545. Представления кососимметрическими формами в конечном поле. Карлиц (Representations by skew forms in a finite field. Carlitz L.), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 19—31 (англ.)

Пусть $q = p^n$, $p > 2$ — простое число. $GF(q)$ — поле Галуа из q элементов. A — невырожденная кососимметрическая матрица порядка $m = 2r$. В статье рассматривается задача о числе матриц X раз-

меров $m \times t$ с элементами из $GF(q)$ таких, что

$$X'AX = B, \qquad (1)$$

где X' означает транспонированную матрицу, а B — некоторую матрицу размеров $m \times t$. Устанавливается, что если матрица B невырождена, то число $Z_r(A, B)$ решений уравнения (1) равно

$$q^{rm-r^2} \prod_{i=0}^{r-1} (q^{m-2i} - 1).$$

$Z_r(A, B)$ вычисляется и в общем случае. В качестве приложения этих результатов исследуется число решений уравнения

$$\begin{vmatrix} A & X \\ X' & 0 \end{vmatrix} = \beta,$$

где A — невырожденная кососимметрическая матрица.

В статье также вычисляется число $S(t, 2r)$ кососимметрических матриц порядка t и ранга $2r$ с элементами из $GF(q)$. Оказывается, что

$$S(t, 2r) = q^{r(r-1)} \frac{\Pi_0^{2r-1}(q^{t-i} - 1)}{\Pi_1^r (q^{2i} - 1)}. \qquad (2)$$

Примечание референта. В начале работы (стр. 19) формула (2) дана в неверном виде.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2546. Элементарное доказательство теоремы о представлении простых чисел квадратичными формами. Бриггс (An elementary proof of a theorem about the representation of primes by quadratic forms. Briggs W. E.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 3, 353—363 (англ.)

Вебер доказал (Weber H., Math. Ann., 1882, **20**, 301—329) теорему о том, что каждая чисто коренная бинарная квадратичная форма представляет бесконечно большое число простых чисел.

В реферируемой статье дается элементарное доказательство этой теоремы для форм вида $ax^2 + 2bxy + cy^2$, где $a > 0$, $(a, 2b, c) = 1$ и $D = b^2 - ac$ не есть квадрат.

В тех случаях, когда форма имеет вид $ax^2 + bxy + cy^2$ с нечетным b или $ax^2 + 2bxy + cy^2$, где D есть квадрат, теорему установить очень просто, как только лишь она установлена в первом случае; это уже сделано у Вебера.

Автор использует метод Селберга (Selberg A., Ann. Math., 1949, **50**, 297—304), который последний применил в своем элементарном доказательстве теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

Г. А. Ломадзе

2547. Замечания о корнях одного сравнения. Серпинский (Remarques sur les racines d'une congruence. Sierpiński W.), Ann. polon. math., 1954, **1**, № 1, 89—90 (франц.)

В еще не опубликованной заметке Хойнацкой (M. Chojnacka) доказано, что для составных модулей $m \neq 4$ существуют такие три целых числа a, b, c, попарно не сравнимые по $\bmod m$, что если $f(a) \equiv f(b) \equiv 0 \pmod m$, где $f(x)$ — целочисленный полином, то и $f(c) \equiv 0 \pmod m$.

Хойнацкая доказала, что это предложение не имеет места для простых модулей и $m = 4$.

В реферируемой заметке этот результат обобщается следующим образом: Пусть $m \neq 4$ — составной модуль, если существуют два целых, не делящихся на m числа a и b таких, что $f(a) \equiv f(b) \equiv 0 \pmod m$, то и $f(0) \equiv 0 \pmod m$.

Из этой теоремы следует, что для всякого составного модуля $m \neq 4$ существует целочисленный полином второй степени $f(x) = x^2 + a_1 x + a_2$ такой, что сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod m$ имеет более, чем два корня,

И. Г. Мельников

2548. Свойства периодичности возвратных последовательностей. I. Дюпарк (Periodicity properties of recurring sequences. I. Duparc H. J. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 3, 331—342 (англ.)

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, для которого имеет место закон однозначного разложения на простые множители и, кроме того, элементы R разбиваются на конечное число классов вычетов по $\bmod m$ ($m \subset R$).

Пусть $R[x]$ — кольцо многочленов над R и $f(x) \subset R[x]$. Рассматриваются сравнения по системе модулей $f(x)$ и m. В частности, отмечается, что если старший коэффициент $f(x)$ равен единице кольца R и если многочлен $g(x)$ таков, что результант $f(x)$, и $g(x)$ взаимно прост с m, то множество классов, на которые разбиваются многочлены $g(x)$ по $(\mathrm{mod}\, f(x), m)$, образует группу относительно умножения. Подгруппы этой группы называются U-множествами относительно $f(x)$ и m. Периодом многочлена $g(x)$ по $(\mathrm{mod}\, f(x), m)$ по отношению к U называется натуральное число d такое, что $(g(x))^d \equiv u \pmod{\mathrm{mod}\, f(x), m}$, где $u \subset U$.

В заключение доказан ряд теорем о свойствах определенных таким образом периодов. Возвратные последовательности не рассматриваются.

В. Д. Подсыпанин

2549. О некоторой классификации подходящих дробей. Часть II. Кёйперс, Мёйленбелд (On a certain classification of the convergents of a continued fraction. Part II. Kuipers L., Meulenbeld B.), Nieuw arch. wiskunde, 1954, **2**, № 1, 32—39 (англ.)

Продолжая исследования, опубликованные ранее (РЖМат, 1954, 3601), авторы доказывают следующие теоремы:

1. Для любого иррационального $\alpha > 0$ существуют по крайней мере четыре различных бесконечных класса несократимых рациональных дробей P/Q, удовлетворяющих неравенству $|\alpha - P/Q| < Q^{-2}$.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ каждый из восьми возможных классов содержит бесконечно много дробей P/Q, для которых $|\alpha - P/Q| < 3(1 + \varepsilon)/\sqrt{5}Q^2$.

Э. К. Фогелс

2550. Метод решения некоторых диофантовых уравнений. Милс (A method for solving certain Diophantine equations. Mills W. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 3, 473—475 (англ.)

Излагается простой метод решения в целых числах диофантового уравнения $x^2 + xyz + \varepsilon y^2 + ax + by + c = 0$, где $\varepsilon = \pm 1$, a, b, c — целые числа.

Этот метод является модификацией метода, ранее примененного автором (РЖМат, 1954, 2856), а также Морделлом (РЖМат, 1954, 3609).

Г. В. Емельянов

2551. Представления нуля в виде суммы четырех кубов. Рамасарма (Partitions of zero into

4 cubes. Ramasarma B. V.), Math. Student, 1954, **22**, № 2, 102—103 (англ.)

Если каждой четверке целых чисел a, b, c, d сопоставить четверку

$$(a_1, b_1, c_1, d_1), \qquad (1)$$

где $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, $c \equiv c_1$, $d \equiv d_1 \pmod 6$, $0 \leqslant a_1, b_1, c_1, d_1 < 6$, то, как показал Сринивасан (Srinivasan A. K., Math. Student, 1945, **13**, 47—48), существует не более 10 четверок типа (1), которым соответствуют решения a, b, c, d уравнения

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0. \qquad (2)$$

Для семи четверок типа (1) Сринивасан привел примеры решений. В реферируемой заметке доказывается, что в трех остальных случаях, именно для четверок (1, 1, 1, 3), (2, 2, 3, 5) и (0 1, 1, 4), уравнение (2) не имеет решений в целых числах.

И. Г. Мельников

2552. **О критерии независимости нескольких данных рациональных решений диофантова уравнения $x^3+dx+e=z^2$ (1).** **Бюке** (Sur un critère d'indépendance de plusieurs solutions données de l'équation diophantienne en nombres rationnels $x^3+dx+e=z^2$ (1). Buquet A.), Mathesis, 1953, **62**, № 8—9—10, 281—289 (франц.)

Как известно, для рациональных решений уравнения (1), приведенного в заглавии, определена операция сложения, и относительно этой операции множество всех решений образует аддитивную группу (Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., Теория иррациональностей третьей степени, 1940).

В работе описан метод, позволяющий найти линейную зависимость между данными решениями $A_1, A_2, \ldots, A_p$ или убедиться в их независимости.

Рассматриваются все решения вида $A' = \Sigma \varepsilon_i A_i$, где $\varepsilon_i = 0$ или 1 (но не все $\varepsilon_i = 0$). Если среди этих решений нет удвоенных, то решения $A_1, A_2, \ldots, A_p$ независимы. Если же некоторое $A' = 2B$, то одно из A_i, для которого $\varepsilon_i = 1$, заменяется на B_1 и снова рассматриваются аналогичным образом составленные решения и т. д. В результате алгоритм может остановиться, так как среди полученных решений не будет удвоенных. В этом случае данные решения независимы. Если этого не произойдет, то мы в процессе вычисления вновь придем к решению, полученному ранее. Это может произойти в двух случаях:

1. Между данными решениями существует линейная зависимость и тогда, исключив все промежуточные решения, мы эту зависимость найдем.

2. Мы пришли к решению R конечного нечетного порядка $2n+1$. Такое решение можно бесконечно делить на два, ибо $R = -2nR$.

В заключение описанным методом устанавливается независимость решений (0,1); (—1,4) и (—2,5) уравнения $x^3 - 16x + 1 = z^2$ и решений (0,13); (7,13); (3, —7) и (5, —7) уравнения $x^3 - 49x + 169 = z^2$.

Примечание референта. Во всех выводах используется только то, что рациональные решения уравнения (1) образуют аддитивную группу и что существует признак, позволяющий узнать, можно ли данное решение получить путем удвоения некоторого другого решения и, если можно, то найти это решение. Поэтому метод применим для установления независимости элементов любой аддитивной группы, если есть способ делить на два удвоенные элементы.

В. Д. Подсыпанин

2553. **Некоторые свойства одного семейства многочленов.** **Карлиц** (Congruence properties of the ménage polynomials. Carlitz L.), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 51—57 (англ.)

Устанавливается справедливость сравнения

$$U_{m+n} \equiv (t-1)^m U_n \pmod{m'} \qquad (1)$$

для семейства многочленов

$$U_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!\,(t-1)^k,$$

где число m' определяется соотношениями

$$m = \prod_{p|m} p^e, \qquad m' = \prod_{p|m} p^{e-1}.$$

Сравнение (1) является обобщением некоторого сравнения, полученного Риорданом (Riordan J., Duke Math. J., 1952, **19**, 27—30). Полагая $\Delta f(n) = f(n+m) - f(n-1)^m f(n)$, $\Delta^r f(n) = \Delta\Delta^{r-1} f(n)$, автор доказывает, что для нечетных m

$$\Delta^{2r} U_n \equiv \Delta^{2r+1} U_n \equiv 0 \pmod{m^r m'}. \qquad (2)$$

Для четных значений m модуль в (2) заменяется числом $2^{1-r} m^r m'$. Сравнения типа (1) и (2) устанавливаются и для других семейств многочленов.

Э. Апарисио

2554. **Кратно-совершенные числа.** **Браун** (Multiperfect numbers. Brown Alan L.), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 103—106 (англ.)

Приводится список 110 новых кратно-совершенных чисел (РЖМат, 1954, 3208). Именно, 6 чисел для $k = 5$, 35 чисел для $k = 6$, 66 чисел для $k = 7$ и 3 числа для $k = 8$.

Э. Апарисио

2555. **Равновеликие треугольники Фибоначчи.** **Рейн** (Fibonacci equiareal triangles. Raine Charles W.), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 96—98 (англ.)

Произведение $a_{n-1}a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4}$ любых шести последовательных чисел ряда Фибоначчи выражает площадь каждого из двух равновеликих треугольников, стороны которых представлены некоторыми квадратичными формами из четырех последовательных чисел a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} этого же ряда и еще $a_1 = 1$. Устанавливается также несколько соотношений между сторонами и между углами этих треугольников.

Б. А. Кордемский

2556. **Таблица квадратов Крайчика.** **Блок** (Kraitchik's tables of squares. Block Daniel), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 99—101 (англ.)

Описывается данный Крайчиком (Kraitchik M., Théorie des Nombres, Paris, 1922, 162—169) способ получения квадратов целых чисел от 1 до 1 000 000 при помощи таблицы квадратов до 99^2 и таблицы произведений $101\,K^2$ и $10101\,K^2$ до $K = 99$ на основании тождества $(10000a + 100b + c)^2 = 10^4 \cdot 10101a^2 + 10^2 \cdot 10101b^2 + 10101c^2 - 10^2(b-c)^2 - 10^4(a-c)^2 - 10^6(a-b)^2$.

В. А. Голубев

2557. **Сумматорная формула, включающая числа Фибоначчи.** **Рейхман** (A summation formula involving Fibonacci numbers. Reichman Raphael I.), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 111—112 (англ.)

Если $s_k = \Sigma_{i=1}^{n} i^k a_i$, где a_i — числа ряда Фибоначчи, то

$$s_k = f(n) = \Sigma_{m=0}^{k} (-1)^m \Delta^m n^k a_{n+m+2} + c,$$

где

$$\Delta^m n^k = \Sigma_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i (n-i)^k,$$

а c определяется из уравнения $f(0) = 0$. Формула выведена для $k = 0, 1, 2, 3$ и далее обобщена.

Б. А. Кордемский

2558. О разложении чисел на сумму двух квадратов. Комб (Sur la décomposition des nombres en somme de deux carrés. C o m b e s A.), Mathesis, 1953 **62**, № 8—9—10, 25—48, (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Элементарно и подробно излагается теория разложения чисел на сумму двух квадратов, данная в основном еще Эйлером. Общие теоремы:

1. (XI). Число $N > 1$ разлагается на сумму квадратов двух взаимно простых чисел, если $N = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$ или $N = 2p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$, где $p_i = 4h + 1$, α_i — натуральные числа. Число таких разложений $\Delta(N) = 2^{m-1}$.

2. (XIV). Если N содержит простые делители формы $4h + 3$ в нечетной степени, то N не разлагается вообще на сумму двух квадратов.

В. А. Голубев

См. также: 2512, 2577, 2645.

АЛГЕБРА

2559 К. Современная алгебра. Ван-дер-Варден (Modern Algebra. V a n d e r W a e r d e n B a r t e l L e e n d e r t, in part a development from lectures by E. Artin and E. Noether, V I 264 p., Ungar, 1953, 5.50 doll.), Cumul. Book Index, 1954, № 2, 168 (библ.)

Перевод со 2-го переработанного немецкого издания.

2560 К. Введение в теорию матриц и в современную алгебру. Бомонт, Болл (Introduction to modern algebra and matrix theory. B e a u m o n t R o s s A., B a l l R i c h a r d W., XIII+331 pp., New York, Rinehart., London, Constable, 1954, 30 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 245, 7 (библ.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2561. Об эрмитовой нормальной форме матрицы и теореме Сильвестра о нуль-многообразиях. Эгервари (On the hermitian normalform of a matrix and Sylvester's law of nullity. E g e r v á r y E.), Publs mathematicae, 1954, **3**, № 1—2, 144—149 (англ.)

Пусть $\rho(A)$ означает ранг $n \times n$-матрицы A. Известная теорема Сильвестра: $\rho(A) + \rho(B) - n \leqslant \rho(AB) \leqslant \min\{\rho(A), \rho(B)\}$ — доказывается с помощью разложения матрицы в произведение неособенной матрицы и треугольной специального вида («эрмитовой нормальной)». Геометрические доказательства этой теоремы (типа приведенного в книге референта «Введение в теорию линейных пространств», 1952, 118—119) автор считает неэлементарными.

Г. Е. Шилов

2562. О корнях уравнений восьмой степени с группой кватернионов. Линник Н. В., Сб. науч. работ общетехн. и некоторых спец. кафедр, (Ленингр. технол. ин-т холодильной пром-сти), 1954, **6**, 57—66

Элементарными теоретико-групповыми методами теории Галуа получаются явные в радикалах формулы для корней уравнений 8-й степени с группой кватернионов в некоторой заданной области рациональности R, т. е., в конечном счете, строятся поля с группой кватернионов в качестве группы Галуа. Исчерпывающее решение этой задачи в общей постановке, основанное на использовании результатов геометрии теории Галуа, которая создана Б. Н. Делоне совместно с Д. К. Фаддеевым (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1940, **11**, 1—340), и теории алгебр, ранее было дано Д. К. Фаддеевым (Уч. зап. ЛГУ, 1937, № 17, 17—23).

Корни всех уравнений 8-й степени с группой кватернионов в R выражаются формулами

$$x_\alpha = A + B\zeta + (-1)^\alpha (C + D\zeta)(\xi_1^2 + \xi_3^2) + i^\alpha \xi_1 + i^{3\alpha} \xi_3,$$

$$y_\alpha = A - B\zeta + (-1)^\alpha (C - D\zeta)(\eta_1^2 + \eta_3^2) + i^\alpha \eta_1 + i^{3\alpha} \eta_3$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, 3),$$

где $$\zeta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

и $$\xi_1 = \sqrt{h(1 + c\zeta)\sqrt{\frac{a + ib}{a - ib} \cdot \frac{1 + id\zeta}{1 - id\zeta}}};$$

η_1 получается из ξ_1 заменой ζ на $-\zeta$, а ξ_3 и η_3 из ξ_1 и η_1 — заменой i на $-i$; $A, B, C, D, a, b, c, d, h$ — величины, принимающие произвольные значения из R, причем $\zeta \notin R$.

Б. М. Уразаев

2563. О решении матричного уравнения $e^B \cdot e^C = e^{B+C}$. Чеботарев Г. Н., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 6, 1109—1112

В работе отыскиваются все решения указанного уравнения в матрицах второго порядка. Уравнение это решалось Фреше (Fréchet M., Rend. Circolo mat. Palermo, 1952, **1**, 11—27), указавшим решения, в которых e^B, e^C, e^{B+C} — скалярные матрицы. Фреше не дал полного решения, так как ошибочно считал, что из данного уравнения следует $e^B \cdot e^C = e^C \cdot e^B$. Ошибка эта была указана Дживенсом (Givens W., Math. Revs, 1953, **14**, № 3, 237).

Автор показывает, что все решения данного уравнения сводятся к трем типам: 1. B и C коммутативны (тривиальный случай). 2. B и C не коммутируют, но e^B, e^C, e^{B+C} скалярны (случай Фреше). 3. B и C, e^B и e^C некоммутативны. Этот случай

распадается на три подслучая, для которых выписываются параметрические формы матриц B и C. Кроме свободных параметров, формы эти зависят еще либо от корня уравнения типа $e^{\xi} = 1 + \xi$, либо от двух параметров, связанных соотношением $(e^{\xi} - 1) : \xi = (e^{\eta} - 1) : \eta$.

Полученный результат позволяет найти два новых случая краевой задачи Римана для системы двух пар функций, для которых каноническая система решений находится по формуле Гахова (см., например, Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4, 52).

В. В. Морозов

ГРУППЫ

2564. Графические представления групп. Макс филд (Graphical group representations. Maxfield John E.), Math. Mag., 1954, 27, № 3, 169—174 (англ.)

Элементарное изложение вопроса, предназначенное для студентов-математиков, не специализирующихся в области теории групп. Приведено определение группы, изложен метод построения для конечной группы квадрата Кэли, даны формулировки (без доказательства) некоторых теорем, относящихся к представлениям конечных групп в виде групп подстановок. Изложены методы графического представления групп с помощью групповых диаграмм и с помощью цветных групп Кэли. Оба метода проиллюстрированы на примере группы кватернионов.

В. К. Туркин

2565. Решения уравнения $x^d = 1$ в симметрической группе. Ховла, Херстейн, Скотт (The solutions of $x^d = 1$ in symmetric groups. Chowla S., Herstein I. N., Scott W. R.), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, 25, 29—31 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть $A_{n,d}$ означает число решений уравнения $x^d = 1$ в симметрической группе S_n; образуется функция $A_d(x) = \sum A_{n,d} x^n / n!$ Авторы доказывают, что $A_d(x) = \exp \sum (x^k / k)$, причем в последнюю сумму входят только те k, которые делят d. Это обобщает их предыдущий результат (Canad. J. Math., 1951, 3, 328—334) для числа $A_{n,2}$, равного сумме степеней неприводимых представлений S_n, а также обобщает результат Якобсталя для случая, когда d — простое (Jacobsthal Ernst, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1949, 21, № 12, 49—51).

J. S. Frame

Перевод из Math. Revs, 1953, 14, № 10, 947.

2566. О теореме Жордана. Холл (On a theorem of Jordan. Hall Marshall, Jr.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 2, 219—226 (англ.)

Жордан в 1872 г. доказал, что конечная 4-транзитивная группа подстановок, в которой только тождественная подстановка оставляет неподвижными четыре символа, будет одной из следующих типов: симметрической группой четвертой или пятой степени, знакопеременной группой шестой степени или группой Матье одиннадцатой степени. В работе доказывается следующая более общая теорема: 4-транзитивная группа подстановок конечного или бесконечного множества символов, в которой подгруппа, оставляющая неподвижными четыре символа, имеет нечетный порядок, будет одной из следующих типов: симметрической группой четвертой или пятой степени, знакопеременной группой шестой или седьмой степени или группой Матье одиннадцатой степени.

П. Г. Конторович

2567. О коммутантном изоморфизме подгрупп конечной группы. Азлецкий С. П., Тр. Уральск. политехн. ин-та, 1954, 51, 86—91

Две изоморфные подгруппы H_1 и H_2 группы G называются коммутантно-изоморфными подгруппами (к.-и. п.), если всякому элементу h_1 из H_1 соответствует при изоморфизме такой элемент h_2 из H_2, что $h_2 = kh_1$, где k — элемент коммутанта группы G, причем по крайней мере для одной пары элементов h_1, h_2 элемент k отличен от единицы группы. Множество всех подгрупп группы, коммутантно-изоморфных между собой, называется классом к.-и. п. Используя результаты, полученные О. Ю. Шмидтом для групп, имеющих только один класс неинвариантных подгрупп (Матем. сб., 1926, 33, № 2, 161—172), автор устанавливает, что неспециальная группа, имеющая только один класс к.-и. п., есть группа порядка $p^{\alpha}q$ с определяющими равенствами: $a^{p^{\alpha}} = 1$; $b^q = 1$; $ba = ab^m$, $m^p \equiv 1 \pmod q$; $m \not\equiv 1 \pmod q$, где p и q — простые числа и $q \equiv 1 \pmod p$; единственный класс к.-и. п. составляют подгруппа $\{a\}$ и сопряженные с ней подгруппы. Специальной группой с одним классом к.-и. п. может быть лишь неабелева и негамильтонова группа порядка p^{α}. Рассматриваются также простейшие вопросы, связанные с представлением конечной группы в виде произведения ее силовских подгрупп.

А. П. Дицман

2568. К классификации нульмерных локально компактных абелевых групп со всюду плотным множеством элементов конечного порядка. Вилекин Н. Я., Матем. сб., 1954, 34, № 1, 55—80

В предыдущих работах автора была построена теория, напоминающая известную теорию Ульма счетных дискретных групп. Однако доказанные в них теоремы не содержали теоремы Ульма как частный случай. В данной работе построена теория, обобщающая теорию Ульма. Рассматриваются нульмерные локально компактные абелевы группы со второй аксиомой счетности, примарные по некоторому простому числу p (группы типа P), со всюду плотным подмножеством элементов конечного порядка. Всякая такая группа G и ее открытая и компактная подгруппа H «удовлетворяют условию алгебраичности», если для всех n, i, α

$$\overline{{}_i[p^n G_\alpha]} = {}_i\overline{[p^n G_\alpha^*]},\ p^n H \cap p^{n+k} G_\alpha^* = p^n (H \cap p^k G_\alpha^*)$$

и $p^n H \cap G_\alpha^* = p^n (H \cap G_\alpha^*)$, где $G_0 = G$, $G_\alpha = p^\omega G_{\alpha-1}$, $G_\alpha^* = p^\infty G_{\alpha-1}^*$ для трансфинитных чисел α первого рода, $G_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} G_\beta$, $G_\alpha^* = \bigcap_{\beta<\alpha} G_\beta^*$ для трансфинитных чисел второго рода (обозначения см. Виленкин Н. Я., Матем. сб., 1946, 19, 85—154; 1951, 28, 503—536; 1951, 29, 13—30). Кроме того, требуется, чтобы было $p^n G \cap G_\alpha = p^n G_\alpha + G_\alpha^*$, $G_\alpha = \overline{\bigcap_\beta [G_\alpha]}$ и $p^n G \cap p^{n+m} G_\alpha = p^n \overline{[p^m G_\alpha]}$. Указанные условия выполняются, если

группа G дискретна и $H = 0$. Доказано, что факторгруппы $G_\alpha / G_{\alpha+1}$ с отмеченными в них подгруппами $(H \cap G_\alpha) G_{\alpha+1} / G_{\alpha+1}$ разлагаются в прямую сумму циклических групп и что при определенных условиях на факторы каждой системе факторов соответствует группа рассматриваемого вида, причем факторы однозначно определяют группу.

М. И. Граев

2569. Некоторые некоммутативные расширения полных групп. Хеймо (Some non-abelian extensions of completely divisible groups. Haimo Franklin), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 25—28 (англ.)

В работе используется (без указания на источник) понятие полноты для некоммутативных групп, введенное С. Н. Черниковым (Матем. сб., 1946, 18, 397—422). Через $Z_d(G)$ обозначается d-й член верхнего центрального ряда группы G, через $N(K, G)$ — нормализатор, а через $C(K, G)$ — централизатор подгруппы K в группе G. Пусть H — полная подгруппа группы G, причем $Z_d(G) \subseteq H \subseteq Z_{d+1}(G)$. Если K есть максимальная (в G) подгруппа, пересекающаяся с H точно по $Z_d(G)$, то $N(K, G) = HK$ и фактор-группа $N(K, G) / Z_d(G)$ изоморфна прямому произведению $H / Z_d(G) \times K / Z_d(G)$. Если вдобавок $d = 0$, то фактор-группа $N(K, G) / C(K, G)$ изоморфна группе внутренних автоморфизмов группы G.

Пусть H есть подгруппа группы G, обладающая следующим свойством: если $u^m v \in H$, где m есть целое число, u, $v \in G$ и никакая степень v не содержится в H, то существует элемент $g \in H$, перестановочный с u и такой, что $g^m = u^m v$. Предположим далее, что существует нормальный делитель $K \subset G$, являющийся максимальным среди всех подгрупп (инвариантных или нет), которые пересекаются с H по единице. Тогда $G = HK$, а если G есть группа без кручения, то $G = H \times K$.

В. М. Глушков

2570. Теорема вложения для полугрупп с сокращением. Эванс (An embedding theorem for semigroups with cancellation. Evans Trevor), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 2, 399—413 (англ.)

Изучается вопрос о возможности вложения произвольной счетной полугруппы с сокращением (т. е. системы с одной бинарной ассоциативной операцией, в которой любое из равенств $xy = xz$, $yx = zx$ влечет равенство $y = z$) в полугруппы с сокращением с конечным числом образующих. Приведен пример полугруппы с сокращением (с десятью образующими), не вложимой в полугруппу с сокращением с двумя образующими. В построении существенно используется пример полугруппы с сокращением, не вложимой в группу, приведенный А. И. Мальцевым (Malcev A., Math. Ann., 1937, 113, 686—691).

Высказываются некоторые соображения о вложении счетных полугрупп с сокращением в полугруппы с сокращением с n образующими ($n > 2$). Отмечена связь этого вопроса с вопросом о существовании алгоритма для проверки того, имеется ли для данного элемента обратный в полугруппе с сокращением. Невложимость полугруппы с сокращением в полугруппу с сокращением с двумя образующими связана с наличием в исходной полугруппе подполугрупп, являющихся группами.

Основная теорема: Счетная полугруппа с сокращением, не содержащая подполугрупп, изоморфных группе, вложима в полугруппу с сокращением с двумя образующими.

Доказано, что полугруппа Тьюринга (Turing A. M., Ann. Math., 1950, 52, 491—505), в которой неразрешима проблема тождества, не содержит групп в качестве подполугрупп и, следовательно, вкладывается в полугруппу с сокращением с двумя образующими. Таким образом, существует полугруппа с сокращением с двумя образующими и конечным числом определяющих соотношений, в которой проблема тождества неразрешима.

Ю. И. Соркин

2571. Об одном классе некоммутативных локально бикомпактных групп. Глушков В. М., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 2, 229—232

Доказан ряд теорем о локально бикомпактных локально нильпотентных группах (л. б. л. н.). В такой группе множество B элементов, порождающих циклическую подгруппу с бикомпактным замыканием (бикомпактных элементов), является замкнутой инвариантной подгруппой, факторгруппа по которой чиста (т.е. не содержит бикомпактных элементов). Всякая чистая л. б. л. н. группа является группой Ли. Связная л. б. л. н. группа нильпотентна. Такая группа изоморфна факторгруппе $L \times B/C$, где B изоморфна подгруппе бикомпактных элементов, L — связная односвязная нильпотентная группа Ли, C — замкнутая центральная подгруппа в $L \times B$, пересекающаяся с B по единичной, а с L — по дискретной подгруппе. Подгруппа B бикомпактна и коммутативна. Описано строение произвольных л. б. л. н. групп, в значительной степени напоминающее строение локально бикомпактных абелевых групп. Если все элементы группы G бикомпактны, то она называется периодической. Связная компонента единицы периодической л. б. л. н. группы бикомпактна и содержится в центре этой группы. Нульмерные группы такого вида с отмеченной произвольной открытой бикомпактной подгруппой разлагаются в прямое произведение примарных подгрупп. Указаны некоторые специальные свойства л. б. л. н. групп, порождаемых некоторым своим бикомпактным подмножеством (в частности, доказано, что такие группы являются проективным пределом нильпотентных групп Ли).

Н. Я. Виленкин

2572. О некоторых топологиях в абелевых группах. I, II. Шёнеборн (Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I, II. Schönenborn Heinz), Math. Z., 1954, **59**, № 5, 455—473; 1954, **60**, № 1, 17—30 (нем.)

Рассматриваются абелевы группы, в которых полная система окрестностей нуля состоит из подгрупп. Устанавливаются связи между топологическими свойствами циклических подгрупп и областями операторов, допускаемых группой. При некоторых условиях элементы группы разлагаются на суммы, принадлежащие примарным слагаемым, причем некоторые элементы разлагаются на бесконечное число слагаемых. Среди всех топологизаций, индуцирующих одну и ту же топологию на всех подгруппах вида $\{a\}$, выделяется самая тонкая (с наибольшим числом окрестностей), называемая S-топологией. Для групп с S-топологией устанавливаются теоремы, близкие к доказанным референтом для косепарабельных групп (Виленкин Н. Я., Матем.

сб., 1948, 22, 135—177), являющихся одним из видов S-групп. Основные утверждения доказаны лишь для примарных S-групп, отличающихся от косепарабельных отсутствием некоторых предположений счетности. Рассматривается также класс топологизаций (K-топологизаций), отличающийся от класса сепарабельных групп Крулля отсутствием предположений счетности. Во второй части работы доказана двойственность групп с такой топологизацией и одного класса S-групп. Доказано, что для выполнения теоремы двойственности для других классов групп необходимо, чтобы как в самой группе, так и в ее группе характеров каждая замкнутая подгруппа с компактным множеством образующих была компактна, и достаточно, чтобы, кроме того, каждая предельная точка q некоторого множества $M \subset G$ была предельной точкой множества $M' \subset M$ с компактным замыканием (M' зависит от q). В частности, теорема двойственности имеет место для любой примарной полной группы с первой аксиомой счетности. *Н. Я. Виленкин*

2573 К. **Введение в теорию групп. Александров** (Перев. с русс.) (Introducere în teoria grupurilor. Alexandrov P. S. Traducere din limba rusă, 115 p. cu fig. + erata, Bucureşti, Editura tehnică, Biblioteca Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din RPR, № 4, 1954), Bul. bibliogr. cărţii, 1954, **3**, № 7, 13 (библ.)

2574. **Открытая дискуссия по поводу докторской диссертации Л. Фукса «О проблеме структуры бесконечных групп Абеля». Фейеш-Тот** (Fuchs László doktori disszertációjának nyilvános vitája. Fejes Toth Laszlo), Magyar tud. akad. mat. és. fiz. oszt. közl., 1954, **4**, № 2, 285—288 (венг.)

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

2575. **Инвариантная характеристика псевдометрик поля. Кон** (An invariant characterization of pseudo-valuations on a field. Cohn P. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 2, 159—177 (англ.)

Псевдометрикой поля F называется вещественная функция $W(x)$, $x \in F$, для которой: 1) $W(x) > 0$ при $x \neq 0$, $W(0) = 0$, 2) $W(xy) \leqslant W(x)\,W(y)$, 3) $W(x-y) \leqslant W(x) + W(y)$. Две псевдометрики эквивалентны, если они определяют на F одну и ту же топологию. Псевдометрика, порождающая дискретную топологию, называется тривиальной.

Собственное подмножество K поля F, содержащее -1 и замкнутое относительно умножения, называется масштабом F (gauge set), если при некотором $d \in F$, $d \neq 0$,

$$K + K \subset d^{-1}K \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} d^{-n}K = F.$$

Два масштаба K_1 и K_2 называются эквивалентными, если существуют $a_1, a_2 \neq 0$ из F такие, что $a_1K_1 \subset K_2$, $a_2K_2 \subset K_1$.

Устанавливается взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных масштабов и классами эквивалентных нетривиальных псевдометрик поля F. Именно для каждого $x \neq 0$ из F однозначно определено (при данных K и d) целое число $\nu = \nu(x)$ такое, что $x \in d^{\nu}K$, $x \notin d^{\nu+1}K$; $\nu(0) = \infty$. Пусть $1 < \alpha \leqslant 2$. Для $a \in F$ положим

$$V(a) = \inf \sum_{i=1}^{n} \alpha^{-\nu(x_i)},$$

где inf распространяется на всевозможные представления a в виде $a = x_1 + \cdots + x_n$ (n произвольно). Функция V является псевдометрикой поля F, и отображение $K \to V$ порождает указанное выше соответствие. Далее данную топологию поля F (в которой разность и произведение непрерывны) можно задать некоторой псевдометрикой тогда и только тогда, если в F существует непустое открытое ограниченное множество H, состоящее из нильпотентных элементов (y нильпотентен, если $y^n \to 0$). Если при этом $H + H \subset H$, то топологию можно задать неархимедовой псевдометрикой.

Масштаб K называется целозамкнутым, если из $cx^n \in K$ при всех $n \geqslant 0$ и некотором $c \neq 0$ следует, что $x \in K$. Псевдометрика называется регулярной, если в соответствующем ей классе эквивалентных масштабов имеется (единственный) целозамкнутый масштаб. Регулярные псевдометрики и только они эквивалентны нетривиальным псевдометрикам W, для которых $W(x^n) = [W(x)]^n$, $n > 1$. Данная недискретная топология поля может быть задана регулярной псевдометрикой тогда и только тогда, если совокупность всех нильпотентных элементов (радикал) является открытым ограниченным множеством.

Масштаб K называется линейным, если для каждого $x \neq 0$ из F либо $x \in K$, либо $x^{-1} \in K$. Псевдометрика W эквивалентна метрике (норме) поля тогда и только тогда, когда в соответствующем W классе эквивалентных масштабов имеется линейный масштаб. Каждая регулярная псевдометрика эквивалентна псевдометрике вида $W(x) = \sup V_\lambda(x)$, где (V_λ) — некоторое семейство метрик.

Приводится пример нерегулярной псевдометрики. *З. И. Боревич*

2576. **Об упорядоченных телах. Конрад** (On ordered division rings. Conrad Paul), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 2, 323—328 (англ.)

Крулль (Krull W., J. Math., 1932, **167**, 160—196) установил связь между упорядоченными и нормированными полями. Автор показывает, что такая же связь имеет место между упорядоченными и нормированными телами, и получает некоторые результаты об упорядоченных телах.

Упорядоченное тело можно нормировать следующим образом: ставим каждому элементу a в соответствие класс $V(a)$ сравнимых с ним элементов (элементы a и b называются сравнимыми, если для любого целого числа m существуют такие целые числа n и p, что $ma \leqslant nb$, $mb \leqslant pa$). Сумма классов определяется формулой $V(ab) = V(a) + V(b)$. Множество классов, упорядоченное естественным образом, является упорядоченной группой. Функция $V(a)$ удовлетворяет еще условию $V(a+b) \leqslant \max(V(a), V(b))$ и отличается только знаком от обычной нормы. $V(a)$ называется естественной нормой тела D. Упорядоченность тела D индуцирует архимедову упорядоченность тела классов вычетов его естественной нормы, причем выполняется еще одно дополнительное условие. Автор показывает, что верно и обратное: если тело классов вычетов тела D при какой-то

норме f архимедовски упорядочено и это дополнительное условие выполняется, то существует такая упорядоченность тела D, что норма f является естественной нормой тела D при этой упорядоченности и упорядоченность тела D индуцирует заданную упорядоченность тела классов вычетов.

Далее доказывается, что у любого нормированного тела существует максимальное непосредственное расширение. Автор называет упорядоченную группу G a-расширением своей подгруппы S, если каждый элемент из G сравним с некоторым элементом из S. Упорядоченное тело E называется a-расширением (m-расширением) своего подтела D, если аддитивная группа (группа классов сравнимых элементов) тела E является a-расширением аддитивной группы (группы классов сравнимых элементов) тела D. Если тело не имеет собственных a-расширений (m-расширений), то оно называется a-полным (m-полным). Устанавливается, что упорядоченное тело D a-полно тогда и только тогда, когда оно максимально (не имеет собственных непосредственных расширений) и его тело классов вычетов является полем действительных чисел. Автор показывает, что у любого упорядоченного тела существует a-полное a-расширение и m-полное m-расширение. *Я. В. Хион*

2577. Характеризация алгебраических функций с помощью теоремы Эйзенштейна. Шнейдер (Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes. Schneider Theodor), Math. Z., 1954, 60, № 1, 98—108 (нем.)

Пусть $y = f(z)$ — алгебраическая функция, определяемая уравнением $F(z, y) = 0$, где $F(z, y)$ — многочлен с алгебраическими числовыми коэффициентами. Если $F(z_0, y_0) = 0$ и $F'_y(z_0, y_0) \neq 0$, то существует ветвь функции $f(z)$, определяемая разложением

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)(z - z_0)^k, \quad a_0(z_0) = y_0.$$

Доказывается следующее предложение, уточняющее известный факт, что при алгебраическом z_0 существует натуральное число $T(z_0)$, для которого все значения $T^k(z_0)\, a_k(z_0)$ будут целыми алгебраическими числами:

Если значение $z = 0$ является регулярной точкой для функции $y = f(z)$, то существуют натуральные числа ν_0, s, γ, обладающие тем свойством, что при $\nu > \nu_0$ значения $a_k(1/\nu)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, все принадлежат полю K_ν, порождаемому числом $a_0(1/\nu)$, имеющему степень над полем рациональных чисел, не превышающую s, и становятся целыми при умножении их на соответствующие степени числа $T(1/\nu)$. При этом имеет место неравенство

$$\max\left(T^{k+1}(1/\nu),\ \left|\overline{T^{k+1}(1/\nu)\, a_k(1/\nu)}\right|\right) < \nu^{\gamma(k+1)},$$

где знак $\overline{}$ обозначает максимум модулей чисел, сопряженных со стоящим под этим знаком алгебраическим числом.

Доказывается, что участвующие в формулировке этой теоремы условия могут быть несколько усилены и при этом станут достаточными для обеспечения алгебраичности удовлетворяющей этим условиям аналитической функции. *А. И. Узков*

2578. Структура неполупростых алгебр. Кертис (The structure of non-semisimple algebras. Curtis Charles W.), Duke Math. J., 1954, 21, № 1, 79—85 (англ.)

Дается следующее обобщение известных теорем Веддербарна и Мальцева:

Пусть $\mathfrak{N}$ — радикал алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ полна в $\mathfrak{N}$-адической топологии; если $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ имеет конечный ранг над полем K и сепарабельна, то $\mathfrak{A}$ расщепляема: $\mathfrak{A} = \mathfrak{N} + \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1 \simeq \mathfrak{B}$, причем это расщепление единственно с точностью до внутреннего автоморфизма (определение последнего см. Мальцев А. И., Докл. АН СССР, 1942, 36, 42—45).

То же самое доказывается для конечных (некоммутативных) расширений полных локальных колец (в случае совпадения характеристик кольца и поля вычетов). *В. М. Курочкин*

2579. Структура правоальтернативных алгебр. Альберт (The structure of right alternative algebras. Albert A. A.). Ann. Math., 1954, 59, № 3, 408—417 (англ.)

Доказывается, что полупростая правоальтернативная алгебра A конечного ранга над полем характеристики $\neq 2$ альтернативна. Ранее аналогичный результат был известен для простых алгебр конечного ранга (Albert A. A., Ann. Math., 1949, 50, 318—328), для тел (Скорняков, Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, 177—184) и для некоторых колец (РЖМат, 1955, 1683). Для доказательства рассматриваются йорданова алгебра $A^{(+)}$, получаемая заданием над элементами алгебры A нового умножения формулой: $a \circ b = {}^1/_2(ab + ba)$, и подходящие следы. Последние определяются так: пусть A — алгебра над полем F, алгебра B получается из A при расширении F до его алгебраического замыкания P; функция $\delta(x)$, где $x \in B$, $\delta(x) \in P$, называется подходящим следом для A, если: 1) $\delta(z) = 0$ для всякого нильпотентного элемента $z \in B$; 2) $\delta(u) \neq 0$ для всякого примитивного идемпотента $u \in B$; 3) $\delta(xy) = \delta(yx)$ и 4) $\delta(x(yz)) = \delta((xy)z)$ для любых $x, y, z \in B$.

В ходе доказательства основной теоремы устанавливается, что радикал (максимальный нильидеал) строго одноассоциативной алгебры A (алгебра A называется строго одноассоциативной или строго степенно-ассоциативной, если в любом ее скалярном расширении подалгебра, порожденная одним элементом, ассоциативна) над полем характеристики $\neq 2$ состоит из элементов x, удовлетворяющих условию: $\delta(xy) = 0$ для всех $y \in A$. Отсюда, поскольку допустимый след для A остается таковым и для $A^{(+)}$, вытекает совпадение радикалов алгебр A и $A^{(+)}$. *Л. А. Скорняков*

2580. Об алгебрах, образуемых процессом Кэли — Диксона. Шафер (On the algebras formed by the Cayley — Dickson process. Schafer R. D.), Amer. J. Math., 1954, 76, № 2, 435—446 (англ.)

Инволюцией алгебры называется линейное преобразование ее аддитивной группы, квадрат которого есть тождественное преобразование. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ конечного ранга n над полем F допускает инволюцию $x \to \bar{x}$, причем $x + \bar{x} = t(x)$, $x\bar{x} = \bar{x}x = n(x)$, $t(x)$, $n(x) \in F$, и γ — отличный от 0 элемент поля. Тогда множество пар (x, y) элементов из $\mathfrak{A}$ может быть превращено в алгебру $\mathfrak{B}$, если задать умножение формулой

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 + \gamma\bar{y}_2y_1,\ y_2x_1 + y_1\bar{x}_2).$$

Про алгебру $\mathfrak{B}$ говорят, что она получена из алгебры $\mathfrak{A}$ процессом Кэли — Диксона (К.— Д.) с помощью элемента γ. Алгебра $\mathfrak{B}$ имеет ранг $2n$ над полем F.

Если положить $\mathfrak{A}_0 = F$ и из каждой алгебры $\mathfrak{A}_t$ получать процессом К.— Д. алгебру $\mathfrak{A}_{t+1}$, полагая $\gamma = \gamma_t$, то получим последовательность алгебр. Алгебра $\mathfrak{A}_2$ оказывается алгеброй кватернионов, $\mathfrak{A}_3$ — алгеброй К. — Д. Алгебры $\mathfrak{A}_t$, $t > 3$, не являются альтернативными, но все они эластичны, т. е. удовлетворяют соотношению $(xy)x = x(yx)$. Всякое дифференцирование D_t алгебры $\mathfrak{A}_t$ может быть продолжено до дифференцирования D_{t+1} алгебры $\mathfrak{A}_{t+1}$ формулой $(x, y)D_{t+1} = (xD_t, yD_t)$. Если характеристика $F \neq 2, 3$ и $t \geqslant 3$, то любое дифференцирование алгебры $\mathfrak{A}_{t+1}$ имеет такой вид (при $t = 1, 2$ это утверждение несправедливо). Отсюда следует, что алгебры $\mathfrak{D}_t$ дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}_t$ при $t \geqslant 3$ изоморфны между собой (это — алгебры Ли над F ранга 14). Если характеристика поля F равна 0, то $\mathfrak{D}_t$ является центральной простой алгеброй Ли типа G. Последнее означает, что алгебра Ли, получаемая из $\mathfrak{D}_t$ при расширении F до его алгебраического замыкания P, изоморфна алгебре дифференцирований алгебры К.— Д. над P.

Указывается, что результат, анонсированный Капланским (Kaplansky), позволяет в последней части утверждения требовать только отличия характеристики от 3. Из приведенной теоремы выводится, что алгебры дифференцирований алгебр $\mathfrak{A}_t$ и $\mathfrak{A}_{t'}$ изоморфны тогда и только тогда, если изоморфны их подалгебры К.— Д., полученные после первых трех повторений процесса К.—Д. Отсюда следует, что алгебру $\mathfrak{A}_t$, $t > 3$, повторением процесса К.— Д. можно получить не из всякой подалгебры $\mathfrak{A}_{t'}$, $t' < t$.

Л. А. Скорняков

2581. **Редукции идеалов в локальных кольцах. Норткотт, Рис** (Reductions of ideals in local rings. Northcott D. G., Rees D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, ч. 2, 145—158 (англ.).

Идеал $\mathfrak{b}$ называется редукцией идеала $\mathfrak{a}$, если $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ и если для некоторого m имеет место соотношение $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^m = \mathfrak{a}^{m+1}$. Основные результаты работы относятся к идеалам в локальных кольцах с бесконечными полями вычетов по максимальным идеалам. Для этого случая доказываются следующие предложения:

1. Любой идеал обладает хотя бы одной минимальной редукцией.

2. Число $l(\mathfrak{a})$ элементов в минимальном базисе минимальной редукции идеала $\mathfrak{a}$ одинаково для всех минимальных редукций. Элементы любого такого базиса аналитически независимы.

3. Идеал ранга r с базисом из r элементов совпадает со всей минимальной редукцией.

4. Если $l(\mathfrak{a}) = l$ и идеал $\mathfrak{a}$ имеет базис $u_1, \ldots, u_n$, то l достаточно общих линейных форм $\Sigma a_{ij} u_j$, $i = 1, \ldots, l$ порождают минимальную редукцию идеала $\mathfrak{a}$.

Понятие редукции оказывается связанным с понятием кратности. Пусть $\mathfrak{p}$ — один из минимальных простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$, а $e(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})$ — кратность $\mathfrak{p}$-примарной компоненты идеала $\mathfrak{a}$. В любых кольцах с обрывом возрастающих цепей идеалов имеет место следующее предложение: Минимальные простые идеалы, содержащие редукцию $\mathfrak{b}$ идеала $\mathfrak{a}$, совпадают с минимальными простыми идеалами, содержащими $\mathfrak{a}$. Для любого такого идеала $\mathfrak{p}$ выполняется равенство $e(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}) = e(\mathfrak{b}, \mathfrak{p})$. В конце работы понятие редукции используется для доказательства следующего обобщения известной формулы ассоциативности для кратностей:

Пусть Q — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, обладающее ядром. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы в Q, удовлетворяющие условию $l(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = l(\mathfrak{a}) + l(\mathfrak{b})$ и такие, что сумма $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ является $\mathfrak{m}$-примарным идеалом, то

$$e(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{m}) = \sum_{i=1}^{s} e[(\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i, \mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i]\, e(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_i),$$

где $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ — минимальные простые идеалы, содержащие $\mathfrak{b}$.

А. И. Узков

2582. **Блочные идеалы и арифметика алгебр. Дженнер** (Block ideals and arithmetics of algebras. Jenner W. E.), Compositio math., 1953, 11, № 3, 187—203 (англ.)

В первой части работы рассматриваются двусторонние идеалы (некоммутативного) кольца с единицей. Автор называет идеал блочным, если он не разлагается в прямое пересечение (Fitting H., Math. Ann., 1935, 111, 19—41) нескольких идеалов. Доказывается ряд теорем о представлении идеалов прямыми пересечениями блочных компонент. Эти теоремы содержатся в цитированной работе Фиттинга или легко вытекают из ее результатов.

Во второй части рассматриваются блочные компоненты двусторонних идеалов $\mathfrak{O}$ некоторого порядка (не обязательно максимального) в алгебре A над полем частных k коммутативного кольца o с однозначным разложением идеалов на простые множители. Доказывается, что блочные компоненты идеалов в $\mathfrak{O}$, порождаемых (дробными) идеалами кольца o, порождают мультипликативную абелеву группу, элементы которой однозначно представляются произведениями образующих. Из полученных результатов по-новому выводятся известные результаты мультипликативной теории двусторонних идеалов максимального порядка. В последних двух параграфах рассматриваются дискриминанты и ведущие идеалы порядков полупростой сепарабельной алгебры.

А. И. Узков

2583. **Идеалы в частично упорядоченных множествах. Фринк** (Ideals in partially ordered sets. Frink Orrin), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 4, 223—234 (англ.).

Излагается история возникновения понятия идеала в различных алгебраических образованиях, в частности в структурах. Анализируется понятие идеала в структуре и вводится понятие идеала в частично упорядоченном множестве P следующим образом. Пусть $A \subset P$, A^* обозначает множество всех верхних граней в P для A, A^+ — множество всех нижних граней в P для A. Множество J из P называется идеалом, если для всякого конечного подмножества F из J множество $(F^*)^+$ лежит в J.

На основе такого определения идеала частично

упорядоченного множества дается обзор ряда вопросов, где полезно применение нового понятия (делимость, фактор-объекты, идеалы в полугруппах, вложение частично упорядоченных множеств в структуры, некоторые вопросы топологии в алгебраических системах, упорядоченные алгебраические системы). Приведен ряд сведений из истории частично упорядоченных множеств. *Ю. И. Соркин*

См. также: 2485, 2521, 2528, 2534—2536, 2538, 2539, 2545, 2548, 2552—2554, 2586, 2602, 2605, 2607, 2660, 2662, 2663, 2770, 2872—2876

ТОПОЛОГИЯ

2584. **Пространство псевдометрик на полном равномерном пространстве. Сирота** (The space of pseudo-metrics on a complete uniform space. Shirota Taira), Osaka Math. J., 1953, 5, № 2, 147—153 (англ.)

Псевдометрикой множества R называют всякую такую действительную неотрицательную функцию $\rho(x, y)$ переменных $x \in R$, $y \in R$, что $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ и $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых x, y, z из R. Пусть X — равномерное пространство. Псевдометрику $\rho(x, y)$, определенную на X, автор называет совместимой с X, если для любого $\varepsilon > 0$ в равномерной структуре пространства X существует покрытие, все элементы которого имеют в псевдометрике ρ диаметр $< \varepsilon$. Множество $\mathfrak{S}(X)$ всех совместимых с X ограниченных псевдометрик является как полным метрическим пространством, так и структурно упорядоченной полугруппой (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1952, 279) с обычными расстоянием, сложением и порядком, которые имеются в множестве F всех действительных ограниченных непрерывных функций, определенных на $X \times X$ ($\mathfrak{S}(X)$ является замкнутым подмножеством множества F). Однако в $\mathfrak{S}(X)$ есть другой порядок: считаем $\rho \geqslant \rho'$, если тождественное отображение пространства X на себя является равномерно непрерывным отображением ρ в ρ' в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\rho(x, y) < \delta$ следует $\rho'(x, y) < \varepsilon$. Условимся называть $\mathfrak{S}(X)$ частично упорядоченным множеством, рассматривая его именно с этим порядком, а не с тем, который имеется в нем как в структурно упорядоченной полугруппе.

Автор показал, что всякое полное равномерное пространство X вполне определяется множеством $\mathfrak{S}(X)$, если оно задано как структурно упорядоченная полугруппа или как метрическое пространство, или как частично упорядоченное множество.

Ю. М. Смирнов

2585. **О паракомпактных пространствах. Ян Чжун-дао** (On paracompact spaces. Yang Chung-Tao), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 185—189 (англ.)

Пусть R — общее топологическое пространство (без всяких аксиом отделимости). Автор доказывает следующие теоремы: 1. Если R паракомпактно (т. е. во всякое открытое покрытие этого пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие), то локальная нормальность, нормальность и некоторые ослабления свойств хаусдорфовости и регулярности эквивалентны друг другу. 2. Если R является суммой любого числа замкнутых нормальных своих подпространств, составляющих локально конечную систему, то R нормально. 3. Для того чтобы R было паракомпактным хаусдорфовым (и, следовательно, нормальным) пространством, необходимо и достаточно, чтобы его можно было ретрагировать на паракомпактное хаусдорфово подпространство, пересекающееся с каждым непустым замкнутым множеством пространства R.

Ю. М. Смирнов

2586. **Структуры пространств. Вада** (Lattices of spaces. Wada Junzo), Osaka Math. J., 1953, 5, № 1, 1—12 (англ.)

Множество X называется пространством, если в нем определена такая операция замыкания, что замыкание пустого множества пусто и $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$. Если, кроме того, $\overline{M} \supset M$, то X называется пространством с аддитивной топологией. Через $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_A$ и $\mathfrak{L}_T$ обозначаются соответственно семейства всех пространств, всех пространств с аддитивной топологией и всех топологических пространств, определенных на одном и том же множестве. Хьюитт (Hewitt E., Duke Math. J., 1943, 10, 309—333) изучал структуру, в которую превращается семейство $\mathfrak{L}_T$, если положить $R_1 > R_2$, $R_1, R_2 \in \mathfrak{L}_T$, когда $O(R_1) \supset O(R_2)$, где $O(R)$ обозначает систему всех открытых множеств пространства R. Для пространств R_1 и R_2 из $\mathfrak{L}$ автор полагает $R_1 > R_2$, если тождественное отображение R_1 на R_2 непрерывно. При таком определении множество $\mathfrak{L}$ оказывается полной, атомной и дистрибутивной структурой, а $\mathfrak{L}_A$ — ее подструктурой. Изучаются операции объединения и пересечения пространств в этих структурах. Показывается, что определенная выше структура $\mathfrak{L}_T$ не является подструктурой структуры $\mathfrak{L}$. Структура $\mathfrak{L}_T$ является полной и атомной, но не дистрибутивной. Изучаются различные свойства пространств в связи со структурными операциями в $\mathfrak{L}_T$. Например, каждое топологическое T_1-пространство является объединением двух бикомпактных топологических T_1-пространств.

Топология в пространствах, принадлежащих $\mathfrak{L}_A$, может задаваться посредством сходимости. Два пространства, тождественные относительно сходимости последовательностей, называются L-эквивалентными. Класс эквивалентных пространств, содержащий наименьший элемент в $\mathfrak{L}_A$, образует идеал $\mathfrak{U}_0$, а класс эквивалентных пространств, содержащий наибольший элемент в $\mathfrak{L}_A$ (дискретное пространство), образует двойственный идеал $\mathfrak{U}_I$. В последней части работы изучаются соотношения между пространствами класса $\mathfrak{U}_I$, бикомпактными пространствами и пространствами, в которых каждое бесконечное множество содержит замыкание бесконечного подмножества.

Г. Я. Арешкин

2587. О расстоянии. Хохейзель (Über Distanzfunktionen. Hoheisel Guido), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 203—206 (нем.)

Работа посвящена аксиоматическому исследованию понятия расстояния в абстрактном множестве. Пусть $M = \{x, y, z, \ldots\}$ — абстрактное множество, $N = \{\xi, \eta, \ldots\}$ — упорядоченное множество. Предположим, что на $M \times M$ задана функция $\rho(x, y)$ (кратко xy), называемая расстоянием, а на $N \times N$ — функция $F(\xi, \eta)$; обе функции имеют значения в N (при обычном определении расстояния N есть множество вещественных чисел, а $F(\xi, \eta) = \xi + \eta$). Предположим, далее, что в N выделен некоторый элемент o и выполнены следующие условия:

(α) $\qquad xy \leqslant F(xz, yz),$

(β') $F(\xi, \eta) \leqslant \xi$ при $\eta \leqslant o$; $F(\xi, \eta) \leqslant \eta$ при $\xi \leqslant o$,

(β'') $\qquad F(\xi, \eta) < F(\xi, o)$ при $\eta < o$.

При этих условиях автор доказывает, что $\rho(x, y) \geqslant o$. В дальнейшем рассматриваются лишь элементы $\xi \geqslant o$. Тогда (β'') теряет смысл, а (β') принимает вид:

(β) $\qquad F(\xi, o) \leqslant \xi, \quad F(o, \eta) \leqslant \eta.$

Далее автор считает, что элементы множества M «индивидуализируются» только по отношению к функции ρ (т. е. если для всех $z \in M$ имеют место равенства $\rho(xz) = \rho(yz)$, $\rho(zx) = \rho(zy)$, то $x \equiv y$) и что выполнены следующие условия:

(η) $\qquad \inf\{xz;\ z \in M\} = o$ для каждого $x \in M$,

(ζ) условия $\inf \xi = o$ и $\inf F(\xi, \xi) = o$ эквивалентны.

При этих условиях доказано, что функция ρ обладает обычными свойствами расстояния.

В. И. Соболев

2588. Замечания о реализации хаусдорфовых аксиом в абстрактных множествах. Ацел (Bemerkungen zur Realisierung der Hausdorffschen Axiome in abstrakten Mengen. Aczél J.), Publs mathematical, 1953, 3_1, № 1—2, 183—186 (англ.)

Рассматривается вопрос о построении в произвольном множестве систем окрестностей, определяющих в нем топологические пространства с той или иной отделимостью.

В предположении, что известно разбиение данного множества E на бесконечные непересекающиеся подмножества, автор строит систему окрестностей, определяющую T_1-пространство в E. Если же известно разбиение множества E на счетные непересекающиеся подмножества, то строится система окрестностей, превращающая E в T_2-пространство (хаусдорфово пространство). Конструируемые системы окрестностей являются нетривиальными в том смысле, что они не содержат одноточечных окрестностей.

В § 4 автор дает разъяснения относительно систем окрестностей и определяемых ими топологий в конечных множествах. *Е. А. Щегольков*

2589. Значение полной регулярности и нормальности для критерия бикомпактности. Эст, Фрёйденталь (Vollständige Regularität und Normalität in ihrer Bedeutung für ein Kompaktheitskriterium. Est W. T. van, Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, **A56**, № 5, 409—411; Indagationes math., 1953, **15**, № 5, 409—411 (нем.)

Исправляется ошибка в формулировке и доказательстве критерия бикомпактности, данного ранее этими же авторами (Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1951, A54, № 5, 369—370).

Скажем, что в топологическом пространстве R выполнено свойство E_1 (соответственно E_2), если для любой системы F непрерывных определенных на R функций, удовлетворяющих условию: если $f \in F$ и $g \in F$, то $\max(f, g) \in F$ и $\inf f = \inf g = 0$, существует такая последовательность $x_i \in R$, что $\lim f(x_i) = 0$ (соответственно, существует такая точка $x \in R$, что $f(x) = 0$) для каждого $f \in F$. Оказывается, что для нормальных (а не для вполне регулярных, как утверждалось авторами ранее) пространств каждое из свойств E_1 и E_2 эквивалентно бикомпактности.

Примечание референта. Для вполне регулярных пространств свойство E_2 эквивалентно введенному Хьюиттом свойству псевдокомпактности (Hewitt E., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, № 1, 45—99). Известное ненормальное, вполне регулярное пространство А. Н. Тихонова, не будучи бикомпактным, удовлетворяет свойству E_2. *Ю. М. Смирнов*

2590. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы объединение двух сопряженных границ было сопряженной границей. Гомес-Агилар (Condicion necesaria y suficiente para que la reunion de dos conjuntos frontera sea un conjunto frontera. Gomez Aguilar Ignacia), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, **13**, № 5—6, 328—331 (исп.)

Пусть X и Y — два множества, лежащие в топологическом пространстве 1, дополнение каждого из которых плотно в 1. Доказывается следующая теорема: Для того чтобы дополнение к множеству $X \bigcup Y$ было плотно в 1, необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

$$(\overline{Y} - Y) \cap X \subset \overline{1 - (X \cup Y)},$$
$$(\overline{X} - X) \cap Y \subset \overline{1 - (X \cup Y)}.$$

А. С. Пархоменко

2591. О теореме, называемой теоремой Янишевского. Данжуа (A propos des théorèmes dits «de Janiszewski». Denjoy Arnaud), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 363—365 (франц.)

Отмечается, что предложение, называемое теоремой Янишевского и содержащееся в труде Янишевского, напечатанном в «Prace-matematycze-physik» за 1915 г., было опубликовано автором настоящей статьи (C. r. Acad. sci., 1911, **153**, 423—426; 493—496) в следующей форме:

Пусть C и C' — два континуума в плоскости U, дополнения $U \setminus C$ и $U \setminus C'$ которых состоят из конечного или счетного множества областей. Предположим, что множество $C \setminus C'$ содержится в одной из компонент R' множества $U \setminus C'$ и множество $C' \setminus C$ содержится в одной из компонент R множества $U \setminus C$. Тогда:

1) Если $C \cap C'$ есть континуум или состоит из одной точки, то $R \cap R'$ есть область (открытое связное множество).

2) Если $C \cap C'$ состоит из двух точек или из двух непересекающихся континуумов, то $R \cap R'$ состоит из двух областей.

Однако автор не опубликовал своего доказательства теоремы, считая его слишком трудным и нуждающимся в улучшении. *А. С. Пархоменко*

2592. Открытые топологические круги в плоскости. **Форт** (Open topological disks in the plane. Fort M. K., Jr), J. Indian Math. Soc., 1954, 18, № 1, 23—26 (англ.)

Основным результатом статьи является следующая теорема. Если G — открытое ограниченное множество на плоскости, гомеоморфное внутренности круга, и если граница множества G локально связна, то, каковы бы ни были непрерывное отображение f множества G в себя и положительное число ε, существует такая точка $p \in G$, что расстояние между точками p и $f(p)$ меньше ε. *А. С. Пархоменко*

2593. Некоторые теоремы об n-однородных континуумах. **Берджесс** (Some theorems on n-homogeneous continua. Burgess C. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 136—143 (англ.)

Даются различные определения однородности континуумов и приводятся условия, при выполнении которых однородный континуум является неразложимым; показывается также, что каждый плоский континуум, являющийся в некотором смысле однородным, есть простая замкнутая линия.

Если континуум M представляется в виде суммы n континуумов, ни один из которых не содержится в сумме остальных, то континуум M называется конечной суммой этих континуумов. Если континуум M может быть представлен в виде конечной суммы n континуумов, но не представляется в виде конечной суммы $n+1$ континуумов, то говорят, что он является неразложимым континуумом индекса n. Точечное множество M называется n-однородным, если для любых n различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ множества M и любых n различных точек $y_1, y_2, \ldots, y_n$ множества M существует гомеоморфное отображение T множества M на себя, при котором множество $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ отображается на множество $y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_n$. Множество, являющееся 1-однородным, называется однородным. Множество M называется n-однородным в смысле близости, если каковы бы ни были система из n различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ множества M и система из n открытых подмножеств $D_1, D_2, \ldots, D_n$ множества M, существуют система из n точек $y_1, y_2, \ldots, y_n$, принадлежащих соответственно множествам $D_1, D_2, \ldots, D_n$, и гомеоморфное отображение T множества M на себя, при котором множество $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ отображается на множество $y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_n$. Множество, являющееся 1-однородным в смысле близости, называется однородным в смысле близости. Множество M называется однородным в смысле близости относительно подмножества H, если, какова бы ни была точка x множества H и открытое подмножество D множества M, существует гомеоморфное отображение множества M на себя, при котором точка x переходит в точку множества D.

Приводится ряд теорем, устанавливающих связь между введенными определениями однородности и понятием неразложимости континуума. Среди них отметим следующие:

Теорема 2. Если M — неразложимый континуум индекса $n > 1$, то M не является однородным в смысле близости.

Теорема 3. Если континуум M, являющийся однородным в смысле близости относительно множества H, состоящего из n точек, $n > 1$, неприводим относительно этого множества, то существует такое r, $r \leqslant n$, что M является неразложимым континуумом индекса r.

Теорема 4. Если континуум M, являющийся однородным в смысле близости, неприводим относительно некоторого своего конечного подмножества, то он является неразложимым.

Следствие. Если невырожденный континуум, являющийся однородным в смысле близости, гомеоморфен каждому своему невырожденному подконтинууму, то он является неразложимым.

Теорема 5. Для того чтобы континуум M был неразложимым индекса $n > 1$ необходимо и достаточно, чтобы: 1) в M существовало множество H, состоящее из n точек и обладающее тем свойством, что, каковы бы ни были две точки x и y множества H, найдется континуум K и открытое множество U, для которых $M \setminus y \supset K \supset U \supset x$ и 2) чтобы континуум M не содержал $n+1$ точек такого рода.

Теорема 6. Если континуум M является однородным в смысле близости и ни для каких двух точек x и y континуума M нельзя найти континуум K и открытое множество U, для которых бы выполнялось условие $M \setminus y \supset K \supset U \supset x$, то континуум M оказывается неразложимым.

Далее автор исследует плоские континуумы.

Теорема 7. Если континуум M, являющийся однородным в смысле близости, разбивает плоскость на конечное число связных областей, то он является границей каждой из этих областей.

Теорема 8. Если континуум M, являющийся однородным в смысле близости, разбивает плоскость на конечное число областей, число которых, однако, больше двух, то такой континуум является неразложимым.

Автор указывает, что ему неизвестны примеры такого рода континуумов.

Теорема 10. Всякий n-однородный континуум, $n > 1$, есть простая замкнутая линия.

Автор указывает следующие проблемы:

1) Существуют ли однородные плоские континуумы, разбивающие плоскость и не являющиеся простыми замкнутыми линиями?

2) Является ли всякий однородный разложимый плоский континуум простой замкнутой линией?

А. С. Пархоменко

2594. О двух проблемах К. А. Ситникова. Фрёйденталь (Über zwei Probleme von K. A. Sitnikov. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 2, 114—116; Indagationes math., 1954, 16, № 2, 114—116 (нем.)

В работе референта (Матем. сб., 1952, 31 (73), 439—458) дано определение затухающего отображения f открытого множества $G \subset R^n$ в евклидово пространство R^n и доказано, что если G ограничено, то множество fG открыто и имеет те же самые гомологические группы что и G. Там же ставятся вопросы: являются ли множества G и fG гомеоморфными и порождает ли отображение f изоморфизм фундаментальных групп множеств G и fG?

В реферируемой работе построены два примера затухающих отображений f областей $G \subset R^3$ в пространство R^3, при которых G и fG имеют неизоморфные фундаментальные группы и, следовательно, не гомеоморфны между собой. *К. А. Ситников*

2595. **О теореме Куратовского. Дирак, Шустер** (A theorem of Kuratowski. Dirac G. A., Schuster S.), Proc. Koninkl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 3, 343—348; Indagationes math., 1954, **16**, № 3, 343—348 (англ.)

Приведено простое доказательство следующей теоремы Куратовского (Kuratowski G., Fundam. math., 1930, **16**, 271—283). Обозначим через A граф с вершинами a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, содержащий все ребра вида $[a_i, b_j]$ и не содержащий ребер вида $[a_i, a_j]$ и $[b_i, b_j]$. Через B обозначим полный граф с пятью вершинами. Конечный граф тогда и только тогда не является плоским (т. е. не может быть вложен в плоскость), когда он содержит подграф, гомеоморфный графу A, или подграф, гомеоморфный графу B.

Авторы указывают, что эта теорема остается справедливой и для счетных бесконечных графов, если допускать такие вложения графов в плоскость, для которых множество всех вершин может иметь предельные точки. Приведен пример счетного бесконечного графа, который в этом смысле является плоским, но который нельзя вложить в плоскость таким образом, чтобы множество вершин не имело предельных точек. *В. Г. Болтянский*

2596. **О базисах ребер конечных ориентированных полных графов. Редеи** (Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen. Rédei Ladislaus), Acta math. Acad. sci., hung., 1954, **5**, № 1—2, 17—25 (нем.; резюме русс.)

Рассматривается конечный ориентированный полный граф $\mathfrak{N}$, имеющий n вершин, т. е. такой граф, что каждая пара его вершин соединена в точности двумя противоположно направленными ребрами. Изучаются базисы $\mathfrak{B}$ ребер указанного графа, т. е. такие его минимальные подграфы, что любые две вершины графа $\mathfrak{N}$ можно соединить в $\mathfrak{B}$ реберным путем. Доказывается, что любой базис ребер $\mathfrak{B}$ является плоским графом. В доказательстве существенно используется критерий Понтрягина — Куратовского (см. реф. 2595) для плоских графов. Указывается рекуррентный процесс определения всех базисов ребер данного графа. Отмечается значение изучения базисов ребер графов для математической логики. *Л. Д. Кудрявцев*

2597. **Краткое доказательство теоремы о факторах конечных графов. Татт** (A short proof of the factor theorem for finite graphs. Tutte W. T.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 3, 347—352 (англ.)

Пусть G — конечный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Пусть f — однозначная функция, определенная на множестве V и принимающая только положительные целочисленные значения. Подграф G' графа G называется f-фактором графа G, если множество вершин подграфа G' совпадает с V и каждая вершина $a \in V$ является концом в точности $f(a)$ ребер подграфа G'. В случае, когда $f(a) \equiv n$ для всех $a \in V$, f-фактор называется n-фактором. Дается доказательство необходимых и достаточных условий для того, чтобы граф G не содержал f-факторов. Эти условия выводятся из критерия отсутствия у графа G 1-факторов, ранее полученного автором (J. London Math. Soc., 1947, **22**, 107—111) и Манселлом (Maunsell F., J. London Math. Soc., 1952, **27**, 127—128).
Л. Д. Кудрявцев

2598. **О некоторых неравенствах, связывающих числа Бетти многообразия и его подмножеств. Уайлдер, Рот** (On certain inequalities relating the Betti numbers of a manifold and its subsets. Wilder R. L., Roth J. P.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 3, 207—209 (англ.)

Доказывается ряд соотношений между числами Бетти топологического пространства и его подмножеств (рассматриваются гомологии в смысле Чеха над произвольным полем). Приведем некоторые результаты авторов.

Теорема 1. Пусть M — замкнутое подмножество бикомпакта S. Тогда имеют место следующие соотношения между числами Бетти:

$$p^r(M) \leqslant p^r(S) + p^{r+1}(S, M),$$

$$p^r(S) \leqslant p^r(M) + p^r(S, M),$$

$$p^{r+1}(S, M) \leqslant p^r(M) + p^{r+1}(S).$$

Теорема 2. Пусть M — замкнутое подмножество n-мерного ориентируемого замкнутого многообразия S. Тогда

$$p^r(M) \leqslant p^r(S) + p^{n-r-1}(S \setminus M),$$

$$p^r(S) \leqslant p^r(M) + p^{n-r}(S \setminus M),$$

$$p^{n-r-1}(S \setminus M) \leqslant p^r(M) + p^{n-r-1}(S)$$

($p^k(S \setminus M)$ обозначает размерность k-мерной группы гомологий множества $S \setminus M$ с компактными носителями).

Доказательство теоремы 1 получается чисто алгебраически из рассмотрения точной гомологической последовательности пары (S, M). Теорема 2 получается из теоремы 1 применением закона двойственности Пуанкаре.

Авторы отмечают, что некоторые из результатов заметки были доказаны ранее Понтрягиным, Морсом и Уайтом. *В. А. Ефремович, А. С. Шварц*

2599. **Об изотопии. I. Ногути** (On isotopy. I. Noguchi Hiroshi), Tôhoky Math. J., 1953, **5**, № 2, 104—108 (англ.)

Дается обобщение известной теоремы об аппроксимации непрерывного отображения n-мерного компакта $\mathfrak{A}^n$ в евклидово пространство E^{2n+1} топологическим отображением.

Теорема 1. Для всякого непрерывного отображения f компакта $\mathfrak{A}^m$ $(m \leqslant n)$ в комбинаторное $(2n+1)$-мерное многообразие M^{2n+1} и любого $\varepsilon > 0$ существует такое топологическое отображение $g: \mathfrak{A}^n \to M^{2n+1}$, что $\rho(f, g) < \varepsilon$.

Теорема 2. Если два топологических отображения компакта $\mathfrak{A}^m$ $(m \leqslant n)$ в M^{2n+3} гомотопны, то они изотопны (под изотопией топологического отображения понимается такая гомотопия, которая в каждый момент оставляет его топологическим).

Теорема 3. Для непрерывных отображений компакта $\mathfrak{A}^m$ $(m \leqslant n)$ в M^{2n+3} гомотопические классы взаимно однозначно соответствуют изотопическим классам. *В. А. Ефремович*

2600. **О расслоении $(n-1)$-связного пространства на сферы. Вада** (Note on the fibering of an $(n-1)$-connected space by spheres. Wada

Hidekazu), Proc. Japan Acad., 1953, 29, № 8, 415—417 (англ.)

Пусть X — пространство косого произведения, слоями которого являются $(k-1)$-мерные сферы, и пусть пространство X асферично во всех размерностях, меньших некоторого $n > k$ (т. е. пространство X, в терминологии автора, $(n-1)$-связно). Обозначим через Y базу этого косого произведения, а через $p: X \to Y$ — проекцию. Пусть S_0^{k-1} — некоторый фиксированный слой, а h — непрерывное отображение k-мерного элемента в пространство X, гомеоморфно отображающее его границу на S_0^{k-1} (такое отображение существует, так как по условию $\pi_{k-1}(X) = 0$). Отображение $\mu = p \circ h$ можно рассматривать как непрерывное отображение k-мерной сферы S^k в пространство Y. Пусть $N = \min(n-1, m)$, где $m = 2k-2$, если группа $\pi_{2k-1}(S^k)$ содержит элемент с нечетным инвариантом Хопфа, и $m = 2k-3$ в противном случае. Обозначим через ΔY гомотопическую размерность пространства Y, т. е. нижнюю грань размерностей клеточных комплексов P, для которых существуют такие отображения $\lambda: Y \to P$ и $\lambda': P \to Y$, что $\lambda' \circ \lambda$ гомотопно тождественному отображению пространства Y на себя. Доказано, что если $\Delta Y \leqslant N$, то отображение μ является гомотопической эквивалентностью и имеет место неравенство $2k > n$. Из этого необходимого условия возможности расслоения $(n-1)$-связного пространства X на $(k-1)$- мерные сферы вытекает, в частности, что евклидово пространство невозможно разложить в косое произведение, слоями которого являются $(k-1)$-мерные сферы, а гомотопическая размерность базы не превосходит $2k-3$ (или соответственно $2k-2$, см. выше). *М. М. Постников*

2601. *G*-двойственные пары полуточных пар. Уайтхед (The G-dual of a semi-exact couple. Whitehead J. H. C.), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, № 12, 385—416 (англ.)

Пусть X — произвольный связный клеточный комплекс (CW-комплекс) и пусть $\Pi_q(X) = \pi_q(X^q) / d\pi_{q+1}(X^{q+1}, X^q)$, где d — граничный гомоморфизм. Приклеивая к комплексу X клетки размерностей $> n$, можно построить полиэдр K, для которого $\Pi_q(K) = 0$ при $q \geqslant n$. При распространении тождественного отображения $X^{n+1} \subset X$ до отображения $K^{n+1} \to X$ возникает препятствие, принадлежащее группе $H^{n+1}(K, \Pi_n(X))$. В работе без использования полиэдра K строится некоторая группа $\Pi^n(X)$, оказывающаяся изоморфной группе $H^{n+1}(K, \Pi_n(X))$. Элемент группы $\Pi^n(X)$, соответствующий указанному выше препятствию, обозначается через $\mathbf{I}^n$. Его также можно определить, не пользуясь полиэдром K. Оказывается, что инвариант $\mathbf{I}^n$ по существу совпадает с введенным референтом в его теории натуральных систем $(n-1)$-м фактором полиэдра X. Доказываются теоремы, равносильные основным теоремам теории натуральных систем.

Группа $\Pi^n(X)$ и ее элемент $\mathbf{I}^n$ строятся следующим образом. Пусть $A_n^{\#}(X)$ — группа всех операторных (относительно $\pi_1(X)$) гомоморфизмов группы $\pi^n(X^n)$ в группу $\Pi_n(X)$, а $D_n^{\#}$ [illegible] (обозначение референта)— ее подгруппа, состоящая из всех гомоморфизмов, вида $k \circ j$, где $j: \pi_n(X^n) \to \pi_n(X^n, X^{n-1})$ — гомоморфизм вложения, а k: [illegible] $(X^n, X^{n-1}) \to \Pi_n(X)$ — произвольный операторный гомоморфизм.

Тогда $\Pi^n(X) = A_n^{\#}(X) / D_n^{\#}(X)$, а $\mathbf{I}^n$ является смежным классом по подгруппе $D_n^{\#}(X)$, содержащим естественный гомоморфизм $\pi^n(X^n) \to \Pi_n(X)$. *М. М. Постников*

2602. Выражения для дифференциалов δ_r спектральной последовательности непрерывного отображения. Дезвель (Expression des différentielles δ_r de la suite spectrale d'une application continue. Deheuvels René), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 12, 1286—1288 (франц.)

Дифференциалы спектральной последовательности, отнесенной по Лере некоторому непрерывному отображению $X \to Y$, выражены через естественные гомоморфизмы некоторых алгебр когомологий пространства Y. *М. М. Постников*

2603. Локально правильные разбиения замкнутых ориентируемых поверхностей. Рингель (Lokal-reguläre Zerlegungen geschlossener orientierbarer Flächen. Ringel Gerhard), Math. Z., 1954, **59**, № 5, 484—495 (нем.)

Разбиение замкнутой поверхности на многоугольники (многогранник) называется локально правильным типа (m, r, s), если оно состоит из m r-угольников, причем все вершины s-гранные (Heesch H., Nachr. Göttingen, 1932, 268—273; Ефремович В. А., Докл. АН СССР, 1947, **57**, № 3, 223—226). Автор высказывает гипотезу: на замкнутой ориентируемой поверхности $\mathfrak{F}_p$ рода p тогда и только тогда существует локально правильный многогранник типа (m, r, s), когда $m(rs - 2r - 2s) = 4s(p-1)$ и число mr четно, — но подтверждает ее доказательством только в трех частных случаях: $p = 2$, $s = 3$, $m = 1$. *В. А. Ефремович*

2604. О характеристике простых кривых в трехмерном пространстве. Харролд, Гриффит, Пози (A characterization of tame curves in three-space. Harrold O. G. Jr, Griffith H. C., Posey E. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 4, 235—237 (англ.)

Множество K трехмерного пространства R^3 называется просто вложенным, если существует гомеоморфное отображение трехмерного пространства на себя, переводящее множество K в полиэдр. Цель настоящей статьи — выяснить условия, при которых простая дуга или простая замкнутая линия является просто вложенным множеством.

Множество $X \subset R^3$ называется локально полиэдральным в точке $p \in R^3$, если существует окрестность точки p, пересечение которой с множеством X есть пустое множество или конечный полиэдр.

Говорят, что простая дуга или простая замкнутая линия J обладает свойством P, если для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждой точки $x \in J$ можно найти множество $K \subset S(x, \varepsilon)$, гомеоморфное двумерной сфере, являющееся локально полиэдральным во всех точках множества $K \setminus J$, имеющее x своей внутренней точкой и пересекающее J в двух точках,

если x не является концевой точкой J; если же x — концевая точка, то $K \cap J$ должно состоять из одной точки. Говорят, что простая дуга (простая замкнутая линия) J обладает свойством Q, если существует такое множество G, гомеоморфное замкнутому квадрату, что J входит в его границу (совпадает с его границей) и G является локально полиэдральным во всех точках множества $G \setminus J$. Говорят, что простая дуга (простая замкнутая линия) J обладает свойством Q в точке x, если существует такое множество G, гомеоморфное замкнутому квадрату, что

1) G локально полиэдрально во всех точках множества $G \setminus J$;

2) $G \cap J$ есть дуга (содержащаяся в границе клетки G) и

3) $G \cap J$ есть замыкание окрестности точки x, взятой относительно J.

Имеют место следующие теоремы:

I. Если существует гомеоморфное отображение трехмерного пространства на себя, переводящее множество J в подмножество некоторой плоскости, то J обладает свойствами P и Q.

II. Если J — простая замкнутая линия трехмерного пространства, обладающая свойствами P и Q, то J является просто вложенной.

III. Если одномерное многообразие (простая дуга или простая замкнутая линия) J обладает свойствами P и Q в каждой точке, то J является просто вложенным, и наоборот. *А. С. Пархоменко*

2605. Узлы и трехмерные кольца. Шуберт (Knoten und Vollringe. Schubert Horst), Acta math., 1953, 90, № 3—4, 131—286 (нем.)

Узлом называется класс эквивалентных друг другу узловых линий, т. е. ориентированных замкнутых ломаных линий без двойных точек в трехмерном сферическом пространстве $\mathfrak{S}^3$, переходящих друг в друга при изотопных преобразованиях сферы $\mathfrak{S}^3$. При отказе от ориентации получаем соответственно неориентированный узел. Класс незауженных линий, т. е. линий, эквивалентных треугольнику, называется кругом.

Для построения сложных узлов из более простых рядом авторов были предложены различные конструкции, приводимые в настоящей статье: произведение узлов, построение зацепленного узла и обегающего узла (собственно, «трубчатого узла», Schlauchknoten), причем последняя конструкция обобщается автором — определяются узлы, представимые обегающими косами и обобщенными обегающими косами.

Эти конструкции несколько упрощенно можно описать следующим образом. Произведение двух узлов получается, если соответствующие незацепленные друг с другом узловые линии разрезать каждую в одном месте и соединить полученные концы друг с другом в одну замкнутую линию (с сохранением ориентации). Такое перемножение узлов коммутативно и ассоциативно, причем круг является единицей, и разложение любого узла на простые множители, называемые примарными узлами, оказывается однозначным.

Зацепленный узел получается из данного узла (называемого диагональным узлом, соответствующим данному зацепленному узлу), если составляющую этот узел линию расщепить на две нити, перерезать обе нити в одном месте, и, закрутив их друг относительно друга произвольное число раз, соединить вместе начала и соединить вместе концы обоих отрезков, зацепив при этом получающиеся две петли одну за другую. Как оказывается, зацепленный узел полностью определяется своим диагональным узлом, числом закручиваний нитей друг относительно друга и знаком индекса самозацепления получающегося цикла (который равен ± 2 и не зависит от его ориентации).

Обегающим узлом называется узел, представимый замкнутой линией, лежащей на поверхности какого-нибудь заузленного или незаузленного тора (в последнем случае узел называется торическим), неэквивалентной средней линии этого тора и негомологичной нулю в ограниченном этим тором трехмерном кольце (а для торического узла — и в его дополнении). Узел, представимый средней линией тора, называется носителем обегающего узла. Обегающий узел полностью определяется своим носителем, обегающим коэффициентом и индексом зацепления узловой линии со средней линией тора. Обегающим коэффициентом узловой линии, лежащей в трехмерном кольце, называется кратность, с которой ориентированная в ту же сторону средняя линия кольца становится ей гомологичной.

Узловая линия, лежащая внутри заузленного или незаузленного трехмерного кольца и пробегающая его в одном направлении («монотонно»), образует с ним соответственно обегающую косу или замкнутую косу. При этом только дополнительно предполагается, что число нитей косы, т. е. обегающий коэффициент, больше единицы (нити, конечно, могут зацепляться друг с другом). Если условие монотонного обегания заменяется условием незаузленности каждой из нитей, то получается обобщенная замкнутая или обобщенная обегающая коса. Узлы, представителями которых являются данные узловые линии, называются представимыми этими косами. Такое представление узлов с помощью кос неоднозначно. Так как с помощью замкнутых кос можно, как известно, представить любой узел, то рассматриваются только обегающие (или обобщенные обегающие) косы. Каждой (обобщенной) обегающей косе ставится в соответствие ее носитель — узел, представленный средней линией трехмерного кольца, и (обобщенная) замкнутая коса, получающаяся при «развязывании» заузленного кольца в незаузленное. Носитель и эта (обобщенная) замкнутая коса образуют полную систему инвариантов для (обобщенной) обегающей косы.

Применяемые при этих конструкциях узлы естественно рассматривать как более простые, чем получающиеся в результате построения. При этом появляется вопрос об установлении понятия большей или меньшей простоты узлов, разрешаемый автором с помощью введения понятия сопроводительного узла. Сопроводительным узлом для данного узла называется всякий отличный от него и от круга узел, представимый средней линией трехмерного кольца, содержащего соответствующую данному узлу узловую линию. При этом средняя линия кольца берется ориентированной в том же направлении, что и данная узловая линия, если обегающий коэффициент отличен от нуля, и оставляется без ориентации — если он равен нулю (так что в этом случае сопроводительный узел будет неориентированным).

Сопроводительный узел считается проще данного узла, так что все узлы оказываются частично упорядоченными в порядке большей или меньшей простоты. Каждый из множителей произведения узлов

является его сопроводительным узлом; диагональный узел служит сопроводительным узлом для зацепленного узла; отличный от круга носитель обегающего узла есть его максимальный сопроводительный узел; для узла, представимого (обобщенной) обегающей косой, носитель той из этих кос, которая имеет наименьшее число нитей, тоже является максимальным сопроводительным узлом.

Узел называется простым, если для него не имеется сопроводительных узлов. Зацепленный узел, диагональным узлом которого служит круг, всегда является простым. Простыми узлами оказываются также все торические узлы.

Порядком узловой линии, лежащей в трехмерном кольце, называется наименьшее число точек пересечения ее с поперечной («меридианной») поверхностью, разрезающей кольцо в трехмерный элемент. Порядок не может быть меньше обегающего числа и имеет с ним одинаковую четность. Если узловая линия лежит на поверхности кольца, то порядок и обегающее число совпадают. Порядком сопроводительного узла называется порядок, с которым при построении этого сопроводительного узла данная узловая линия вкладывается в трехмерное кольцо; он определяется неоднозначно, так как может зависеть от выбора представителей узлов.

Понятие сопроводительного узла транзитивно: сопроводительный узел порядка γ_2 для сопроводительного узла порядка γ_1 есть сопроводительный узел порядка $\gamma_1\gamma_2$ для данного узла.

Очевидно, всякий простой узел будет примарным. Оказывается, что узел будет примарным тогда и только тогда, когда он не имеет никакого сопроводительного узла порядка 1.

Отметим еще следующие результаты. Если диагональный узел зацепленного узла отличен от круга, то всякий сопроводительный узел этого зацепленного узла, не совпадающий с диагональным узлом, будет сопроводительным узлом для диагонального узла в 2 раза меньшего порядка, чем для данного. Наконец, всякий обегающий узел примарен.

Работа содержит большое количество других предложений подобного рода. *М. Ф. Бокштейн*

2606. Действительные характеристические циклы комплексных многообразий. Бурдина В. И., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 6, 1085—1088

Пусть $C(k, l)$ — многообразие k-мерных подпространств комплексного $(k+l)$-мерного векторного пространства $\mathfrak{R}^{k+l}$ (здесь k и $k+l$ — комплексные размерности) и $H(k, l)$ — многообразие ориентированных k-мерных подпространств действительного $(k+l)$-мерного векторного пространства R^{k+l}.

Гомологии в $C(k, l)$ изучались Эресманом (Ehresmann C., Ann. Math., 1934, **35**, № 2, 418). Гомологии в $H(k, l)$ изучались Понтрягиным (Понтрягин Л. С., Матем. сб., 1947, **21**, № 2, 233—284), определившим характеристические циклы ориентированного гладкого k-мерного многообразия M^k как прообразы базисных циклов многообразия $H(k, l)$, $l \geqslant k+1$, при тангенциальном отображении многообразия M^k в $H(k, l)$. Аналогичное определение комплексных характеристических циклов комплексного многообразия $\mathfrak{M}^k$ в терминах его тангенциального отображения в $C(k, l)$ было дано Чжэн Шэн-шэнем (Chern Shiing-shen, Ann. Math., 1946, **47**, № 1, 85—121). Среди характеристических циклов Понтрягина находятся известные характеристические циклы Штифеля, а среди циклов Черна (Чжэн Шэн-шэня) — комплексные циклы Штифеля. Так как комплексное многообразие $\mathfrak{M}^k$ может естественным образом рассматриваться как действительное многообразие M^{2k}, то оно имеет как комплексные, так и действительные характеристические циклы. При этом $C(k, l)$ является естественной частью многообразия $H(2k, 2l)$, а тангенциальное отображение многообразия $\mathfrak{M}^k$ в $C(k, l)$ может рассматриваться как тангенциальное отображение многообразия M^{2k} в $H(2k, 2l)$.

В реферируемой работе детально изучаются пересечения циклов, составляющих понтрягинские базы гомологий многообразия $H(2k, 2l)$, с подмногообразием $C(k, l) \subset H(2k, 2l)$. Автор дает формулы, выражающие указанные пересечения через базы гомологий многообразия $C(k, l)$, и формулы, выражающие в кольце пересечений многообразия $C(k, l)$ эти базы гомологий через циклы, соответствующие циклам Штифеля (принципиальная возможность такого выражения была установлена Чжэн Шэн-шэнем). В результате получаются формулы, выражающие все действительные характеристические циклы комплексного многообразия в его кольце пересечений через его комплексные циклы Штифеля.

Доказательства не приведены; имеются указания на метод доказательства некоторых формул.

Примечание референта. В тексте имеются неточности: например, на стр. 1085 неверно указаны базы гомологий многообразия $H(k, l)$ по модулю 2; кроме того, неправильно даны пояснения к основной формуле, выражающей пересечение $C(k, l) \times \langle\alpha\rangle^*$ (стр. 1088). Именно, вместо «если i_2 отсутствует полагают $i_2 - i_1 = 0$», должно быть следующее, пояснение: если i_2 отсутствует, то вместо $i_2 - i_1$ должно стоять 0 при $\omega(1) = l-2$ и $2k-\alpha$ при $\omega(1) = l-1$. (Последнее исправление сообщено референту автором.) *В. А. Рохлин*

2607. Топологические характеристики гомоморфизмов компактных групп Ли. Дынкин Е. Б., Матем. сб., 1954, **35** (**77**), № 1, 129—173

Доказано, что гомологичные между собой (т. е. порождающие одинаковые гомоморфизмы групп гомологий) унитарные представления компактной группы Ли эквивалентны. Отсюда следует, что порожденный представлением гомоморфизм групп гомологий определяется старшим весом этого представления. Найдены общие формулы, определяющие гомоморфизм F групп гомологий, порожденный унитарным неприводимым представлением со старшим весом Λ. Эти формулы имеют вид

$$F(x) = n \cdot A_x(\Lambda) P,$$

где x — примитивный класс гомологий данной компактной группы Ли, n — степень рассматриваемого представления, $A_x(\Lambda)$ (обозначение референта) — некоторый многочлен от коэффициентов старшего веса Λ, зависящий от x, а P — примитивный класс унитарной группы, размерность которого равна размерности класса x. Многочлены A_x выписаны явно. Рассмотрены некоторые частные случаи. Основные результаты этой работы были уже опубликованы в кратком изложении (Дынкин Е. Б. Докл. АН СССР, 1952, **85**, № 4, 697; 1952, **87**, № 3, 333; 1953, **91**, № 5, 1007; см. также РЖМат, 1954, 2015).

М. М. Постников

2608. **Обобщение теоремы Люстерника — Шнирельмана о покрытиях сфер и некоторых связанных с ней теорем. Фет А. И.**, Докл. АН СССР, 1954, 95, № 6, 1149—1151

Пусть ϑ — непрерывное отображение n-мерной сферы S^n в себя, квадрат которого есть тождественное отображение. Автор утверждает (теорема 1), что в каждом покрытии сферы S^n, состоящем из $n+1$ замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$, найдется множество F_i, которое пересекается с $\vartheta(F_i)$. Приведено доказательство теоремы 1 для случая дифференцируемого гомеоморфизма ϑ.

Теорема 1 является обобщением известной теоремы Люстерника — Шнирельмана (Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930) о покрытиях сфер. Используя теорему 1, автор обобщает различные предложения, вытекающие из теоремы Люстерника — Шнирельмана.

Обобщением теоремы Люстерника — Шнирельмана о категории проективного пространства является теорема о том, что категория многообразия, полученного из S^n отождествлением точек a, $\vartheta(a)$, равна $n+1$. Обобщением одной теоремы Борсука (Borsuk K., Fundam. math., 1933, **20**, 177—190) является следующая теорема 4: Пусть на $(n+1)$-мерном шаре T^{n+1} с границей S^n задано такое непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов на S^n, что для любой точки $a \in S^n$ векторы поля Φ в точках a и $\vartheta(a)$ направлены неодинаково. Тогда в шаре T^{n+1} поле Φ имеет нулевые векторы. Из этого результата автора следует положительное решение «задачи А» из заметки референта (Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 5, 162) для случая, когда фигурирующий в этой задаче оператор L является инволюционным.

Теорема 5 обобщает другое предложение Борсука: При любом непрерывном отображении f сферы S^n в евклидово пространство E^n найдется такая точка $a \in S^n$, что $f(a) = f(\vartheta(a))$. *М. А. Красносельский*

См. также: 2568, 2575, 2622, 2645, 2666, 2671, 2678, 2720, 2771, 2830, 2876

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2609. **О неявных функциях. Кудрявцев Л. Д.**, Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 155—156

Указывается следующее обобщение теоремы о неявных функциях: Пусть $F(x, y) = \{F_j(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q), j=1, 2, \ldots, q\}$ — дифференцируемое отображение области G $(p+q)$-мерного евклидова пространства E^{p+q}_{xy} в q-мерное евклидово пространство E^q_y, и пусть якобиан $\partial(F_1, \ldots, F_q)/\partial(y_1, \ldots, y_q) \neq 0$ в G. Тогда для всякой точки $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in G$ такой, что $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, существует некоторая ее окрестность $U \subseteq G$, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно определяет неявное дифференцируемое отображение $y = f(x) = \{y_j = f_j(x_1, \ldots, x_p), j=1, \ldots, q\}$ некоторой окрестности $V \subseteq E^p_x$ точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_p^{(0)})$ в пространство E^q_y.

При доказательстве этого результата используется теорема А. М. Родиянского (Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 1, 15—17) о том, что дифференцируемое отображение n-мерной области в n-мерное евклидово пространство при необращении в нуль якобиана является локально топологическим в окрестности каждой точки. *Е. В. Гливенко*

2610. **Об абсолютно нульмерных множествах. Пхакадзе Ш. С.**, Сообщ. АН ГрузССР, 1954, **15**, № 4, 201—205

Рассматриваются множества, лежащие в евклидовом пространстве R_n. Множество A называется счетной конфигурацией множества B, если A есть сумма счетного числа слагаемых, каждое из которых конгруэнтно некоторому подмножеству B. Множество X называется абсолютно нульмерным, если при любом способе введения вполне аддитивной меры μ, при котором X оказывается измеримым, для всякой счетной конфигурации X' множества X будет $\mu X' = 0$. По поводу введенного таким образом понятия без доказательства формулируется ряд теорем. *И. П. Натансон*

2611. **Замечание о теореме Гаусса — Грина. Чеккони** (Una osservazione sul teorema di Gauss—Green. Cecconi Jaurés), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 50—51 (итал.)

Формулируется обобщение классической теоремы Гаусса—Остроградского для ориентируемой поверхности Фреше типа двумерной сферы, двумерная мера Лебега которой равна нулю (см. также РЖМат, 1955, 1709). *Л. Д. Кудрявцев*

2612. **Контуры поверхностей Фреше. Чезари** (Contours of a Fréchet surface. Cesari Lamberto), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 3, 173—194 (англ.)

Изучаются поверхности в смысле Фреше и свойства длин кривых на них. В первой половине статьи излагается обобщенная теория Каратеодори односвязных областей, в частности теория простых концов, и доказываются некоторые леммы, например выясняется структура множества простых концов и соответствующего ему точечного множества, достижимого с помощью некоторой последовательности континуумов. Во второй половине исследуются поверхности, являющиеся непрерывными образами простых замкнутых жордановых областей, и действительные функции f, определенные на поверхностях. Пусть $\overline{G}$ — простая замкнутая жорданова область на плоскости, F — непрерывное отображение $\overline{G}$ в евклидово пространство E^3, являющееся представлением некоторой поверхности S, множество точек которой обозначается через $[S]$. Полагается $D_t^- = \mathcal{E}_{x \in G}\{f[F(x)] < t\}$ и $D_t^+ = \mathcal{E}_{x \in G}\{f[F(x)] > t\}$, а множества $F(\overline{D_t^-} - D_t^-)$ и

$\overline{F}(D_t^+ - D_t^+)$ называются соответственно нижним и верхним краем линии уровня $[f = t]$ на поверхности S при представлении F. Рассматривается понятие обобщенной длины $l(t)$ нижнего (соответственно верхнего) края линии уровня $[f = t]$ поверхности при некотором фиксированном ее представлении. Обобщенная длина $l(t)$ изучалась автором и ранее, для нее, в частности, им было доказано неравенство

$$KL(S) \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} l(t)\, dt,$$

где $L(S)$ — мера Лебега поверхности S, а функция f удовлетворяет на S условию Липшица с постоянной $K > 0$ (Cesari L., Surface area, Princeton University Press, 1954). Основной результат статьи состоит в доказательстве инвариантности обобщенной длины $l(t)$ для различных представлений поверхности, эквивалентных в смысле Фреше.

Л. Д. Кудрявцев

2613. Определение вполне аддитивной функции ее значениями на полупространствах. Костелянец П. О., Решетняк Ю. Г., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 135—140

Пусть в евклидовом n-мерном пространстве R_n задана вполне аддитивная неотрицательная функция $m(E)$ (мера), определенная для всех B-множеств, причем $m(R_n) < \infty$. А. Н. Колмогоров (Успехи матем. наук, 1938, № 5, 233) поставил задачу прямого доказательства теоремы: мера $m(E)$ однозначно определяется своими значениями на всех полупространствах, т. е. множествах точек $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих неравенствам $\sum_1^n \omega_i x_i - t \leqslant 0$, где ω_i и t — произвольно заданные числа. С помощью теории характеристических функций она была доказана Гельфандом, Крамером и Уолдом (Cramer H., Wold H., J. London Math. Soc., 1936, **11**, 290—294; см. также Крамер Г., Случайные величины и распределение вероятностей, М., 1947, 128—129).

Авторы дают прямое доказательство теоремы. Сначала доказывается, что если две вполне аддитивные неотрицательные функции F_1 и F_2 совпадают на всех замкнутых полупространствах, то они совпадают и для любых n-мерных шаров, а следовательно, и для любых B-множеств. Далее выводится интегральное уравнение, решая которое можно получить значение рассматриваемой функции для шара, если известны ее значения для любого полупространства.

Ю. С. Очан

2614. Об интервалах с заданными длинами. Морс (On intervals of prescribed lengths. Morse Anthony P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 407—414 (англ.)

Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ — заданная последовательность неотрицательных чисел с $\sum_0^\infty \lambda_n = 1$, H — множество всевозможных конечных и счетных сумм членов последовательности λ. λ-цепью J называется последовательность открытых интервалов $J_n \subseteq (0,1)$ с $m\, J_n = \lambda_n$.

Доказывается, что для того чтобы на интервале (0,1) нашлось множество A меры нуль, которое не могло бы быть покрыто никакой λ-цепью, необходимо и достаточно, чтобы H имело меру нуль.

Это условие выполняется, например для последовательности $\lambda_n = 2 \cdot 3^{-n-1}$ (H — канторово множество меры нуль) и не выполняется для $\lambda_n = 2^{-n-1}$ ($H = [0,1]$).

Ю. С. Очан

2615. Условия компактности множеств функций n независимых переменных. Греко (Criteri di compattezza per insiemi di funzioni in n variabili indipendenti. Greco Donato), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 121—124 (итал.)

Для функций с непрерывными частными производными до p-го порядка, заданных на области A с достаточно гладкой границей, формулируются две теоремы о компактности в классе C.

Формулировка 2-й теоремы неясна. Повидимому, имелось в виду следующее утверждение: Пусть для множества J функций $u(x_1, \ldots, x_n)$ для каждой области $D \subset A$ существуют положительные постоянные H_D и M_D такие, что: 1) для каждой области $B \subset D$ с диаметром b $P_{p,\,m}[B, u] \leqslant H_D b^\nu$, где $\nu > (n - mp)/m$ и

$$P_{p,\,m}[B,u] = \left\{\int_B \left[\sum_{i_1,\ldots i_k=1}^{n} \left|\frac{\partial^p u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}\right|^2\right]^{m/2} dv\right\}^{1/m};$$

2) $|u| \leqslant M_D$ на D. Тогда множество J компактно в классе C внутри A и функции $u \in J$ равномерно удовлетворяют условию Липшица, причем показатель равен $\lambda = \nu + (mp - n)/m$, если $\lambda < 1$, или равен любому числу < 1, если $\lambda \geqslant 1$. 1-я теорема соответствует случаю $mp > n$ и $\nu = 0$.

А. А. Конюшков

2616. Об одной проблеме Смитиса. Салем (On a problem of Smithies. Salem R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 4, 403—407; Indagationes math., 1954, **16**, № 4, 403—407 (англ.)

Автор строит пример непрерывной функции $f(x)$ с периодом 2π, для которой ряд Фурье $\Sigma a_m \cos mx$ обладает свойствами: 1) $|a_m|$ убывает, 2) ряд расходится при $x = 0$.

Существование такой функции дает ответ на один вопрос Смитиса (Smithies F., Proc. London Math. Soc., 1937, **43**, 255—279). Как известно, если $K(s, t)$ — эрмитово ядро, принадлежащее к L_2 на $\{a \leqslant s \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$, и $\{\varphi_n(s)\}$ — ортонормированная система всех его собственных функций, а λ_n — соответствующие им собственные числа, то билинейный ряд $\sum_{n=1}^\infty \varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}/\lambda n$ сходится в среднем к $K(s, t)$ (предполагается, что члены ряда расположены так, чтобы $|\lambda_n|$ убывали).

Возникает вопрос, должен ли ряд сходиться в обычном смысле, если ядро $K(s, t)$ непрерывно. Если положить $K(s, t) = f(s - t)$, где f — четная функция периода 2π, и $a = 0$, $a = 2\pi$, то билинейный ряд принимает вид $a_0/2 + \Sigma a_n \cos n(s - t)$, где a_n — коэффициенты Фурье для $f(x)$.

Таким образом пример автора дает отрицательный ответ на вопрос о сходимости билинейного ряда в случае непрерывности $K(s, t)$.

Н. К. Бари

2617 К. Собрание сочинений. Т. I. Лузин Н.Н., 400 стр., М., Изд-во АН СССР, 1953, 22 руб.

Том I содержит следующие работы Н. Н. Лузина по метрической теории функций действительного переменного и теории функций комплексного переменного: 1) К основной теореме интегрального исчисления, 2) Об одном случае ряда Тейлора, 3) К абсолютной сходимости тригонометрических рядов, 4) К абсолютной сходимости тригонометрических рядов, 5) О свойствах измеримых функций, 6) О свойствах интеграла Данжуа, 7) О сходимости тригонометрических рядов Фурье, 8) Интеграл и тригонометрический ряд (диссертация), 9) Об отыскании примитивных функций, 10) Элементарное доказательство основной теоремы о плотности множеств, 11) О понятии интеграла, 12) О конформном отображении, 13) О существовании аналитических функций, равномерно бесконечных вблизи купюры, 14) О единственности и множественности аналитических функций, 15) О единственности и множественности аналитических функций, 16) Об одном свойстве функций с суммируемым квадратом, 17) Об одном виде сходимости интеграла Дирихле, 18) О последовательностях измеримых функций, 19) О строении измеримых функций, 20) О локализации принципа конечной площади, 21) Об одном особом интеграле.

В конце тома помещены краткие комментарии редакторов Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова. Перечисленные работы можно разбить на 3 группы. К первой относятся работы 1) — 11), примыкающие к диссертации Н. Н. Лузина 8) и опубликованные в 1912—1917 гг. Сюда же следует отнести 17) (1934 г.) и 21) (последняя работа при жизни автора не публиковалась). В работах этой группы изучаются различные вопросы общей теории тригонометрических рядов и теории рядов Фурье, а также устанавливается ряд теорем метрической теории функций действительного переменного.

Ко второй группе относятся более поздние работы 12) —16) и 20), посвященные смежным вопросам теории функций действительного переменного и теории функций комплексного переменного. Важнейшие из них суть 14) и 15), написанные совместно с И. И. Приваловым.

Наконец, третью группу образуют работы 18) и 19), представляющие собой принадлежащие Н. Н. Лузину добавления к переводу книги Лебега «Интегрирование и отыскание примитивных функций» (М.—Л., ГТТИ, 1934). *И. П. Натансон*

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

2618. Об аксиомах промежуточности (Продолжение). Моринага, Нисигори (On axiom of betweenness (Continued). Morinaga Kakutarō, Nishigōri Noboru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 3, 399—408 (англ.)

В частично упорядоченном множестве отношение $x > y > z$ или $x < y < z$ называется открытой промежуточностью (open-betweenness); если заменить здесь $>$ и $<$ на $\geqslant$ и $\leqslant$, то получается определение замкнутой промежуточности (closed-betweenness). Автор дает полную систему аксиом для каждого из этих отношений. *А. С. Есенин-Вольпин*

2619. Конгруэнтные и неконгруэнтные взаимно однозначные соответствия. Баджемил (Congruous and incongruous one-to-one correspondences. Bagemihl Frederick), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 256—260 (англ.)

Изучаются свойства взаимно однозначных соответствий между множеством E и его подмножествами, а также взаимно однозначные соответствия между подмножествами множества E.

Пусть Γ есть взаимно однозначное соответствие между множествами M и N и пусть $m \in M$ и $n \in N$ — элементы, соответствующие друг другу в Γ. Если $m \neq n$, то элемент m называется свободным элементом M по отношению к Γ.

Соответствие Γ имеет α свободных элементов, если мощность множества свободных по отношению к Γ элементов равна α. Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольный класс множеств попарно без общих точек; мощность множества $\mathfrak{A} \geqslant 2$. Пусть далее p есть число, $p \geqslant 1$. Если m и n принадлежат одному и тому же множеству класса $\mathfrak{A}$, они называются конгруэнтной парой элементов по отношению к $\mathfrak{A}$; если же m и n принадлежат различным множествам класса $\mathfrak{A}$, то они называются неконгруэнтной парой элементов по отношению к $\mathfrak{A}$.

Соответствие Γ является по отношению к $\mathfrak{A}$: а) конгруэнтным, б) p-конгруэнтным, в) по крайней мере p-неконгруэнтным, г) p-неконгруэнтным, если выполняются соответственно следующие условия: а) все пары соответствующих элементов конгруэнтны по отношению к $\mathfrak{A}$; б) Γ конгруэнтно по отношению к $\mathfrak{A}$ и каждое множество класса $\mathfrak{A}$ содержит в точности p пар соответствующих элементов; в) если $X \in \mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{A}$, $X \neq Y$, то имеется по крайней мере p неконгруэнтных по отношению к классу $\{X, Y\}$ пар соответствующих элементов; г) если $X \in \mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{A}$, $X \neq Y$, то имеется в точности p неконгруэнтных по отношению к классу $\{X, Y\}$ пар соответствующих элементов.

p-Разложением ($p \geqslant 1$) множества E называется класс $\mathfrak{H}$, состоящий из p непустых, попарно не пересекающихся множеств, объединение которых есть E.

Доказывается следующая общая теорема (теорема 1):

Пусть $\mathfrak{M}$ есть класс $\aleph_\alpha$ взаимно однозначных соответствий, каждое из которых имеет по крайней мере $\aleph_\alpha$ свободных элементов; E — объединение множеств, между которыми определены соответствия класса $\mathfrak{M}$. Пусть далее p — кардинальное число, $2 \leqslant p \leqslant \aleph_\alpha$. Тогда существует p-разложение $\mathfrak{H}$ множества E такое, что каждый элемент класса $\mathfrak{M}$ является по крайней мере $\aleph_\alpha$-неконгруэнтным по отношению к $\mathfrak{H}$.

Далее доказывается ряд утверждений, касающихся типов взаимно однозначных соответствий между порциями упорядоченных множеств (т. е. интервалами этих множеств) и самими множествами, если порядковый тип последних совпадает с порядковым типом множества рациональных чисел или множества действительных чисел, упорядоченных в естественном порядке. *В. Я. Арсенин*

2620. Недоказуемость гипотезы Суслина без помощи аксиомы выбора в системе аксиом Бернайса — Мостовского. Есенин-Вольпин А. С., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 1, 9—12

Пусть C — упорядоченное множество; D_C — утверждение, что C обладает счетным плотным подмножеством; S_C — утверждение, что всякое множество попарно не пересекающихся интервалов C не более чем счетно. Известно, что если C — открытое непрерывно упорядоченное множество, то из D_C следует S_C (без использования аксиомы выбора). Утверждение, что в таком случае и из S_C следует D_C, называется гипотезой Суслина. В реферируемой работе доказывается, что если теория множеств непротиворечива, то гипотеза Суслина не может быть доказана в ней без помощи аксиомы выбора. Под «теорией множеств» понимается система Бернайса—Мостовского (Mostowski A., Fundam. math., 1939, **32**, 201). Указывается, что результаты сохраняют силу и для системы 'A, B, C' Шепердсона (Shepherdson J. C., J. Symbolic Logic, 1951, **16**, № 3, 161—190; РЖМат, 1954, 2491). Приводятся условия, достаточные для того, чтобы класс подобной системы мог быть использован для построения модели типа гёделевской модели Δ (Гёдель К., Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1, 96—149) для аксиом Бернайса—Мостовского.

В. А. Успенский

2621. Об аксиоме выбора. Курепа (Über das Auswahlaxiom. Kurepa G.), Math. Ann., 1953, **126**, № 5, 381—384 (нем.)

Рассматриваются множества, частично упорядоченные отношением $\leqslant$. Если всякие два элемента сравнимы, множество называется упорядоченным, или цепью; если никакие два элемента не сравнимы, множество называется антиупорядоченным, или антицепью. Как известно, с помощью аксиомы выбора можно доказать следующие три утверждения:

(K) Каждое частично упорядоченное множество содержит максимальную цепь.

($\overline{\text{K}}$) Каждое частично упорядоченное множество содержит максимальную антицепь.

(V) Каждое множество может быть упорядочено. Известно, что из (K) следует аксиома выбора (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1952, стр. 74), а из (V) не следует аксиома выбора (Mostowski A., Fundam math., 1939, **32**, 201—252). В реферируемой заметке устанавливается, что аксиома выбора эквивалентна конъюнкции ($\overline{\text{K}}$) & (V) (теорема 3.1).

Пусть f — взаимно однозначное отображение на себя (преобразование) множества S. Сумма $\bigcup_n f^n(x)$, где $x \in S$, а n пробегает все целые числа, обозначается $[x]_f$. Наименьшее из кардинальных чисел $k[x]_f$, где через kX обозначается мощность множества X, называется порядком f. Рассматривается предложение $\Pi[n]$: для каждого множества, содержащего по крайней мере n точек, существует преобразование порядка $\geqslant n$. Доказывается (теорема 4.2), что из аксиомы выбора следует $\Pi(3)$. (Аналогичная теорема верна, конечно, для любого n. *Прим. реф.*) Рассматривается предложение $P[3, \aleph_0]$: каждое бесконечное множество может быть разложено в сумму своих непересекающихся подмножеств X так, что $3 \leqslant kX \leqslant \aleph_0$. Очевидно, $P[3, \aleph_0]$ является следствием $\Pi[3]$. Автор утверждает, что и обратно, из $P[3, \aleph_0]$ следует $\Pi[3]$ (теорема 5.2). Однако, по мнению референта, при доказательстве этого утверждения неявно используется аксиома выбора (а если разрешить здесь использование аксиомы выбора, то, ввиду теоремы 4.2, теорема 5.2 становится тривиальной).

Факториал $a!$ кардинального числа a определяется как мощность множества $S!$ всех преобразований множества S, для которого $kS = a$. Без доказательства утверждается, что $a! = 2^a$ для всякого алефа a (утверждение 3.1). Формулируется следующая проблема 6.1: можно ли доказать аксиому выбора в предположении, что для любого бесконечного кардинального числа a справедливо равенство $a! = 2^a$.

В. А. Успенский

2622. О топологической сходимости в σ-алгебрах точечных множеств. Новак, Новотный (On the convergence in σ-algebras of point-sets. Novák Josef, Novotný Miroslav), Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 3, 291—296 (англ.; резюме русс.)

σ-алгеброй множеств называется всякая система подмножеств некоторого множества R, замкнутая относительно операций счетного сложения и вычитания. Две σ-алгебры α и β изоморфны, если существует такое взаимно однозначное соответствие f между α и β, что $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$ и $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$ для любых $A_i \in \alpha$. Последовательность множеств A_i алгебры α топологически сходится к $A \in \alpha$ (обозначение: $A_i \to A$), если $A = \overline{\lim} A_n = \bigcap_k \bigcup_{n \geqslant k} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_k \bigcap_{n \geqslant k} A_n$.

Авторы исследуют вопрос о метризации σ-алгебр, т. е. ищут необходимые и достаточные условия для того, чтобы на данной σ-алгебре α можно было определить такую метрику $\rho(A, A')$, чтобы утверждения $\rho(A_i, A) \to 0$ и $A_i \to A$ были эквивалентны. Назовем вероятностную функцию, определенную на какой-либо σ-алгебре, α-вероятностью, если она равна нулю лишь на пустом множестве.

Основная теорема. Для того чтобы σ-алгебра α была метризуемой, необходимо и достаточно каждое из следующих условий: 1) α изоморфна системе всех подмножеств некоторого не более чем счетного множества, 2) на α можно ввести α-вероятность.

Следствия. Если σ-алгебра α метризуема, то: а) каждая система попарно не пересекающихся множеств из α не более чем счетна, б) каждая строго возрастающая вполне упорядоченная последовательность множеств из α не более чем счетна.

По определению, топологическая сходимость обладает диагональным свойством, если всегда из сходимости последовательностей $A_{ni} \overset{i}{\to} A_n$ и $A_n \to A$ следует наличие подпоследовательности $A_{n_k i_k} \to A$, в которой при $k \leqslant k'$ всегда $n_k \leqslant n_{k'}$. Диагональное свойство является необходимым, но не достаточным условием метризуемости σ-алгебр, как показывает пример σ-алгебры, состоящей из всех конечных и счетных подмножеств, а также из дополнений к ним, некоторого несчетного множества.

Ю. М. Смирнов

2623. О множествах, являющихся обобщением *H*-множеств. Шнейдер А. А., Матем. сб., 1954, **34(76)**, № 2, 249—258

По определению, ограниченное множество E есть множество типа H, если существуют числа d, α_k, β_k, n_k такие, что

а) $0 < d < 1$, $\beta_k - \alpha_k = d$ $(k = 1, 2, \ldots)$;

б) n_k — целые положительные числа и $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$;

в) интервалы $\left(\frac{\alpha_k + i}{n_k}, \frac{\beta_k + i}{n_k}\right)$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots;$ $k = 1, 2, \ldots)$ не содержат точек из E.

Ограниченное множество E называется множеством типа H^*, если оно удовлетворяет предыдущему определению, в котором числа n_k заменяются на действительные числа λ_k, неограниченно растущие вместе с ростом k.

Доказываются следующие теоремы:

1. Всякое H^*-множество состоит из конечного числа H-множеств, расположенных на непересекающихся интервалах.

2. Если множество E есть H^*-множество, то существует такое положительное число θ и H-множество D, что $E = \theta D$ (θD означает множество чисел θx, где $x \in D$).

Показывается также, что существуют H^*-множества, не являющиеся H-множествами.

И. Е. Жак

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

2624. Некоторые теоремы о *F. A.*-рядах. Верблюнский (Some theorems on F. A. series. Verblunsky S.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, **3**, № 1, 89—105 (англ.)

Для функций $f(x) \in L(\alpha, \alpha + 2\pi)$ рассматриваются ряды вида

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\mu_\nu x}, \tag{1}$$

$$f(x) \approx \sum_{\nu \neq 0} c_\nu e^{i\mu_\nu x}, \tag{2}$$

где

$$c_\nu = \lambda_\nu \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\, e^{-i\mu_\nu t}\, dt,$$

$$\lambda_\nu = \frac{1}{2} \frac{h^2 + \mu_\nu^2}{h + \pi(h^2 + \mu_\nu^2)}, \quad h > 0,$$

$0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots$ — неотрицательные корни уравнения

$$\mu + h \operatorname{tg} \pi\mu = 0 \tag{3}$$

и

$$\mu_{-\nu} = -\mu_\nu.$$

Ряды, связанные с более общим уравнением чем (3), изучались Пикаром (Picard É., Traité d'analyse, t. II, 1922, гл. VI). Ряды (1) (при $\alpha = 0$) исследовались Фейешом (Fejes L., Acta Univ. szeged. Sec. scient. math., 1946, **11**, 28—36), который и назвал их *F. A.*-рядами (die Fouriersche Reihe der Abkühlung), т. е. «рядами Фурье охлаждения». Автор (Bull. sci math., 1952, **76**, 85—96) дал формулу представления частной суммы ряда (1) и указал некоторые свойства этих рядов.

В реферируемой работе доказывается, что если имеет место (2), то, каков бы ни был интервал $(\beta, \beta + 2\pi)$, найдется функция $F_\beta(x)$ такая, что

$$F_\beta(x) \approx \sum_{\nu \neq 0} c_\nu e^{i\mu_\nu x}.$$

Устанавливается, что ряд (2) суммируется $(C, 1)$ почти всюду и если $g(x)$ есть $(C, 1)$-сумма ряда (2), то последний есть ряд Фурье $g(x)$, т. е. при $\mu \geqslant 0$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(x)\, e^{-i\mu x}\, dx = \begin{cases} c_\nu, & \text{если } \mu = \mu_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots) \\ 0, & \text{если } \mu \neq \mu_\nu. \end{cases}$$

Показывается, что для рядов (1) при условии $f \in L_2(\alpha, \alpha + 2\pi)$ выполняется равенство Парсеваля. Для этих рядов устанавливается также теорема типа Хаусдорфа—Юнга. Это, в частности, указывает на то, что ортогональность системы функций, относительно которой вычисляются коэффициенты c_ν, не является существенной для теорем типа Хаусдорфа—Юнга. *И. М. Ганзбург*

2625. Применение *A*-интегрирования к одному классу тригонометрических рядов. Ульянов П. Л., Матем. сб., 1954, **35(77)**, № 3, 469—490

Приводятся доказательства теорем, сформулированных ранее в заметке автора (РЖМат, 1953, 163). *Н. К. Бари*

2626. Чезаровское суммирование двойных рядов Фурье. Чжоу Юаньшуй (On the Cesàro summability of double Fourier series. Chow Yuan Shih), Tôhoku Math. J., 1954, **5**, № 3, 277—283 (англ.)

Пусть $f(u, v)$ — функция, периодическая с периодом 2π относительно каждого из переменных и интегрируемая в квадрате $(-\pi, \pi; -\pi, \pi)$. Положим: $\varphi(u, v) = [f(x + u, y + v) + f(x + u, y - v) + f(x - u, y + v) + f(x - u, y - v) - 4s]/4$

$$\Phi(u, v) = \int_0^u ds \int_0^v \varphi(s, t)\, dt, \quad \Phi_1(u) = \int_0^\pi dt \left| \int_0^u \varphi(s, t)\, ds \right|,$$

$$\Phi_2(v) = \int_0^\pi ds \left| \int_0^v \varphi(s, t)\, dt \right|.$$

Доказываются теоремы:

1. Если $\Phi(u, v) = o[uv / \lg(u^{-1}) \lg(v^{-1})]$, $\Phi_1(u) = O[u / \lg(u^{-1})]$ и $\Phi_2(v) = O[v / \lg(v^{-1})]$ при $u \to +0$, $v \to +0$, то двойной ряд Фурье функции $f(u, v)$ в точке (x, y) $(C, 1, 1)$-суммируем к s.

2. Если $0 < \alpha, \beta < 1$, $\Phi(u, v) = o(u^{1/\alpha} v^{1/\beta})$, $\Phi_1(u) = o(u^{1/\alpha})$ и $\Phi_2(v) = o(v^{1/\beta})$ при $u \to +0$, $v \to +0$, то двойной ряд Фурье функции $f(u, v)$ в точке (x, y) (C, α, β)-суммируем к s.

В статье имеются опечатки. *В. Г. Челидзе*

2627. О сходимости и суммировании тригонометрических интерполяционных полиномов для функций двух переменных. Киприянов И. А., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 6, 953—955

Пусть $s_{\mu,\nu}(f; x, y)$ и $s^{(m,n)}_{\mu,\nu}(f; x, y)$ — соответственно частная сумма порядка μ по x и порядка

у по y ряда Фурье функции $f(x, y)$ и тригонометрического полинома, интерполирующего ее в системе равноотстоящих узлов

$$x_k^{(m)} = 2k\pi/(2m+1), \quad y_l^{(n)} = 2l\pi/(2n+1).$$

Для любой четырехмерной матрицы $\| k_{\mu,\nu}^{(m,n)} \|$, для которой $k_{\mu,\nu}^{(m,n)} = 0$, если $\mu > m$ или $\nu > n$, рассматриваются две последовательности полиномов

$$\sigma_{m,n} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} k_{\mu,\nu}^{(m,n)} s_{\mu,\nu} \qquad (1)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{m,n} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} k_{\mu,\nu}^{(m,n)} s_{\mu,\nu}^{(m,n)}. \qquad (2)$$

Рассматриваются функции пространств типа Орлича (Orlicz W., Bull. Acad. polon., 1932, A, № 8/9, 207—220) и формулируются предложения, выражающие связь между процессами приближения (1) и (2). Если L_M и $L_{\overline{M}}$ — два таких пространства, а $\tilde{A}_{x,y}^{(\overline{M})}$ — класс функций $f(x, y)$, абсолютно непрерывных вместе со своими частными производными первого порядка на периоде и таких, что $\partial^2 f / \partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \in L_{\overline{M}}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = 2)$, то из того, что при $m \to \infty$, $n \to \infty$, $0 < \tau < m/n < 1/\tau$, для всех $f \in \tilde{A}_{x,y}^{(\overline{M})}$

$$mn \| f - \sigma_{m,n} \|_M \to 0,$$

$$n \left\| \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{m,n}}{\partial x} \right\|_M \to 0, \qquad (3)$$

$$m \left\| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{m,n}}{\partial y} \right\|_M \to 0,$$

следуют те же соотношения с заменой $\sigma_{m,n}$ на $\tilde{\sigma}_{m,n}$.

Если для всех $f(x, y) \in L_{\overline{M}}$ при таком же неограниченном росте m и n

$$\| f - s_{m,n} \|_M \to 0,$$

то любая функция $f \in \tilde{A}_{x,y}^{(\overline{M})}$ удовлетворяет соотношениям (3), в которых вместо $\sigma_{m,n}$ стоит $\tilde{s}_{m,n}^{(m,n)}$. Аналогичные утверждения формулируются для случая, когда вместо пространства L_M рассматривается пространство L интегрируемых функций.

Родственные результаты для функций одной переменной содержатся в работе С. М. Лозинского (Матем. сб., 1944, 14(56), № 3, 175—268).

А. Ф. Тиман

2628 к. Собрание сочинений. Т. II. Бернштейн С. Н., 628 стр., М., Изд-во АН СССР, 1954, 34 р. 60 к.

Предпринятое АН СССР издание собрания сочинений акад. С. Н. Бернштейна должно состоять из 4 томов. Из них первые два посвящаются конструктивной теории функций — ветви математического анализа, в значительной степени созданной трудами автора.

Том I, вышедший в 1952 г., содержал 49 работ, опубликованных в различных изданиях за 1905—1930 гг., том II содержит еще 62 (№№ 50—111) работы, которые были опубликованы в 1931—1953 гг., и «является более или менее полным завершением... исследований» автора «в этой области» (из предисловия автора).

Содержание тома II таково: 50) Пример непрерывной функции, для которой формула тригонометрического интерполирования Лагранжа расходится. 51) О многочленах, ортогональных на конечном отрезке. 52) Об ограничении значений многочлена $P_n(x)$ степени n на всем отрезке по его значениям в $n+1$ точках отрезка. 53) Об абсолютном максимуме тригонометрической суммы. 54) Об одном видоизменении интерполяционной формулы Лагранжа. 55) Об одной интерполяционной формуле Валле-Пуссена. 56) Об одном классе интерполяционных формул. 57) Добавление к статье Е. В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна». 58) Замечание по поводу заметки Р. Салема. 59) О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов. 60) Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов. 61) О некоторых экстремальных свойствах последовательных интегралов. 62) Об одной теореме Сегё. 63) О периодических функциях, для которых наилучше сходящимся рядом является ряд Фурье. 64) Об области сходимости многочленов $B_n f(x) = \sum_{m=0}^{n} f(m/n) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$. 65) О сходимости некоторых последовательностей многочленов. 66) О формуле квадратур Чебышева. 67) О формулах квадратур Котеса и Чебышева. 68) О формулах квадратур с положительными коэффициентами. 69) Примеры формул квадратур с положительными коэффициентами и рациональными абсциссами. 70) Примеры формул квадратур, аналогичных формуле Чебышева. 71) Об одной системе неопределенных уравнений. 72) Некоторые приложения параметрического метода к изучению квадратурных формул. 73) О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени. 74) О наилучшем приближении $|x-c|^p$. 75) О теореме В. А. Маркова. 76) О базе системы Чебышева. 77) Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций. 78) Конструктивная теория функций вещественной переменной. 79) Определение ряда функций по экстремумам его последовательных остатков. 80) К вопросу о локальном наилучшем приближении функций. 81) О сходимости многочленов $\sum_0^n f(m/n) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$ в комплексной области. 82) Конструктивная теория функций как развитие идей Чебышева. 83) О наилучшем приближении функций $\int_0^\infty |y|^s d\psi(s)$ на отрезке $[-1, +1]$. 84) О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. 85) О верхней границе максимума модуля производной монотонной функции конечной степени. 86) Обобщение одного результата С. М. Никольского. 87) Новый вывод и обобщение некоторых формул наилучшего приближения. 88) Добавление к работе И. И. Ибрагимова «Об асимптотическом значении наилучшего приближения функции, имеющей вещественную особую точку». 89) О наилучшем приближении аналитических функций при помощи целых функций конечной степени. 90) О предельных зависимостях между константами теории наилуч-

шего приближения. 91) Предельные законы теории наилучших приближений. 92) О свойствах однородных функциональных классов. 93) О некоторых элементарных экстремальных свойствах многочленов нескольких переменных. 94) О целых функциях конечной степени многих вещественных переменных. 95) Распространение неравенства С. Б. Стечкина на целые функции конечной степени. 96) Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени. 97) О майорантах конечного или квазиконечного роста. 98) Об аддитивных майорантах конечного роста. 99) Функции конечной степени и функции конечной полустепени. 100) О некоторых свойствах циклически монотонных функций. 101) О некоторых новых достижениях теории приближения функций действительной переменной. 102) О весовых функциях. 103) О связи квазианалитических функций с весовыми функциями. 104) Определение и основные свойства квазиалгеброидных и алгеброидных функций. 105) О наилучшем приближении функций нескольких переменных посредством многочленов или тригонометрических сумм. 106) Примечания к теории регулярно монотонных функций. 107) О нормально возрастающих весовых функциях и майорантах конечного роста. 108) Об антимайорантах. 109) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы четная неубывающая функция была весовой. 110) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы почти возрастающая четная функция была слабо весовой. 111) Слабо весовые функции и майоранты. В конце тома (стр. 590—624) помещены авторские комментарии. *И. И. Натансон*

См. также: 2587, 2588, 2591, 2637, 2652 **К**, 2665, 2727, 2728, 2735, 2737, 2743, 2744, 2771, 2780, 2828 **Д**.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2629. О характере возрастания простых множеств многочленов с данными нулями. Нассиф (On the mode of increase of simple sets of polynomials of given zeros. Nassif M.), Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, 1952, **4**, № 4, 29—36 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Автор рассматривает множество многочленов, определенных соотношением

$$P_{mk+i}(z) = (z + a_i)^{mk+i}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1;\ m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Он находит, что это множество порядка 1, типа $1/|\rho|$ (в смысле Уиттекера), где ρ есть наименьший по абсолютной величине нуль некоторого определителя. В частности, множество $[z + (-1)^n]^n$, которое использовал в качестве примера Эвейда (Eweida M. T., Duke Math. J., 1947, **14**, 865—875), имеет тип $4/\pi$, тогда как множество $(z + \omega^n)^n$, где ω — мнимый кубический корень из 1, имеет тип около 1,339. Результаты этой статьи применяются автором в другой его работе (Duke Math. J., 1952, **19**, 107—113).

R. P. Boas, Jr.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 121.

2630. О рядах по ортогональным многочленам. Кузьмина А. Л., Укр. матем ж., 1954, **6**, № 3, 363—366

Пусть $\{p_n(z)\}$ — система многочленов, ортонормированная на замкнутой аналитической кривой C с весом $p(z) = |\nu(z)|^2$, где $\nu(z)$ — функция, аналитическая и отличная от нуля в замкнутой внешности кривой C.

Доказывается, что ряды

$$\sum_0^\infty c_n p_n(z) \quad \text{и} \quad \sum_0^\infty c_n w^n$$

эквивалентны в смысле сходимости, регулярности их сумм и сверхсходимости в точках, соответствующих друг другу при конформном отображении области $|w| > 1$ на внешность кривой C.

Приводятся другие теоремы, аналогичные теоремам о степенных рядах. *П. К. Суетин*

2631. О полноте в одном классе нежордановых областей. Мергелян С. Н., Тамадян А. П., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1954, **7**, № 2, 1—17 (резюме арм.)

В односвязной области D рассматривается класс $H_2(D)$ аналитических функций с интегрируемым квадратом модуля по площади D, т. е. $f(z) \in H_2(D)$, если $\iint_{(D)} |f(z)|^2\, dx\, dy < \infty$. Система полиномов называется полной в $H_2(D)$, если для всяких $\varepsilon > 0$ и $f(z) \in H_2(D)$ можно указать полином $P(z)$, удовлетворяющий условию

$$\iint_{(D)} |f(z) - P(z)|^2\, dx\, dy < \varepsilon.$$

Доказано (Маркушевич А. И., Фаррель, 1934), что полнота имеет место, если D — область Каратеодори, т. е. ее граница совпадает с границей дополнения к $\overline{D}$, содержащего бесконечно удаленную точку. Для некаратеодориевых областей впервые М. В. Келдыш (Матем. сб., 1939, 5(**47**), 391—402) показал, что полнота может иметь или не иметь места, в зависимости от некоторых метрических характеристик области. В работах М. В. Келдыша, А. Л. Шагиняна и М. М. Джрбашяна рассматривались области, топологически эквивалентные луночке, ограниченной двумя изнутри касающимися окружностями. В обзорной статье С. Н. Мергеляна (РЖМат, 1954, 1629) была дана без доказательства качественная характеристика некаратеодориевой области другого типа, именно области с разрезами, для того чтобы в ней имела место полнота системы полиномов. В реферируемой статье изложено развернутое доказательство приведенного там утверждения и дается метрическая характеристика, близкая к точной.

Рассматривается следующий класс областей D_P: на окружности единичного радиуса берется совершенно нигде не плотное множество P точек; от точек этого множества в круге проводятся радиальные разрезы одинаковой длины $h < 1$; в результате получается область, имеющая вид круга радиуса $1-h$ со счетным множеством секториальных выступов длиною h, ограниченных дугами единичной окружности, смеж-

выми с множеством P, и радиусами, проведенными к концам этих дуг. Пусть $z_1, z_2, \ldots$ — счетное множество точек, плотное в P, а $\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \ldots$ — система неперекрывающихся отрезков, покрывающих все точки множества P и обладающих свойством, что $\Delta_k^{(n)}$ при $n \to \infty$ и постоянном k стягиваются к точке z_k. Доказывается теорема:

Система полиномов полна в области D_P, если для каждого $k = 1, 2, \ldots$ и достаточно большого $n > n_0(k)$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}(\Delta_k^{(n)} \cap CP) < \exp\left[-\exp\frac{31h}{\operatorname{mes}(\Delta_k^{(n)})}\right], \quad (1)$$

где CP — дополнительное к P множество относительно всей окружности. Приводится пример области, для которой вместо (1) справедлива оценка

$$\operatorname{mes}(\Delta_k^{(n)} \cap CP) \leqslant \exp\left[-\exp\frac{1}{\operatorname{mes}(\Delta_k^{(n)})^{1-\varepsilon}}\right],$$

но полноты системы полиномов не будет.

Для доказательства неполноты используется следующее легко доказываемое предложение: система полиномов не полна в области D_P, если для всякого полинома $Q(z)$, удовлетворяющего неравенству $\iint_{D_P} |Q(z)|^2\,dx\,dy \leqslant 1$, в круге $|z| \leqslant r$, $h < r < 1$, справедлива оценка $|Q(z)| \leqslant M(r)$, где $M(r)$ не зависит от выбора полинома $Q(z)$. В статье есть опечатки. *М. Г. Хапланов*

2632. Об одном рекуррентном соотношении, связанном с интерполяционной задачей Абеля—Гончарова. Евграфов М. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 5, 449—460

В реферируемой заметке автор, исследуя разложение степеней z^h по функциям $\varphi_n(z) = z^n\Phi^{(n)}(\lambda_n z)$, где

$$\Phi(z) \equiv \sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{n!}\, z^n$$

— целая функция, приходит к рассмотрению целых рациональных функций A_i (от переменных λ_j), которые определяются линейными соотношениями

$$A_0 = 1,\ A_0\frac{\lambda_n}{1!} - A_1 = 0,$$

$$A_0\frac{\lambda_n^2}{2!} - A_1\frac{\lambda_{n+1}}{1!} + A_2 = 0,$$

. . . . . .

Величины A_i оказываются связанными рекуррентными соотношениями

$$A_{n+1} = c_0^{(n)}A_n + c_1^{(n)}A_{n-1} + \ldots + c_n^{(n)}A_0,$$

где коэффициенты $c_m^{(n)}$ зависят только от λ_j; несмотря на сложность последних зависимостей, автор указывает, однако, способ вычисления асимптотических значений $c_m^{(n)}$ при $n \to \infty$ в предположении, что

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots, \quad \lambda_n \to \infty.$$

Таким образом, открывается путь для нахождения оценок A_i.

Далее следует теорема, которую автор характеризует как «обобщение некоторых результатов» предшествующей работы (РЖМат, 1954, 3673) «о полноте близких систем». Эта теорема «использует специфику интерполяционной задачи Абеля — Гончарова и дает результаты более сильные, чем применение» названной «работы к случаю Абеля—Гончарова».

Заметка изложена кратко и содержит опечатки. *В. Л. Гончаров*

2633. Об экстремальных областях по отношению к коэффициенту a_3 ограниченных однолистных функций. Тамми (On the extremal domains belonging to the coefficient a_3 of bounded schlicht functions. Tammi Olli), Suomalais tiedeakat. toimituks., 1953, сер. A-I, № 162, 12 s. (англ.)

Методом Лёвнера доказаны:

Теорема 1. Экстремальная функция $F^*(z, x)$, реализующая наибольшее значение $|a_3(x)|$ в семействе ограниченных однолистных функций

$$F(z, x) = z + \sum_2^\infty a_\nu(x)z^\nu, \quad |F(z, x)| < x^{-1}, \quad |z| < 1,$$

определяется следующими соотношениями:

1) $e^{-1} \leqslant x \leqslant 1$,

$$f(z, x) - f^{-1}(z, x) - x^{-1}(z - z^{-1}),$$

$$F^*(z, x) = x^{-1}f(z, x).$$

2) $0 < x \leqslant e^{-1}$,

$$f(z, \sigma) - f^{-1}(z, \sigma) - 2\log\frac{f(z, \sigma)}{z} =$$

$$= \sigma^{-1}(z - z^{-1}), \quad \sigma\log\sigma + x = 0,$$

$$\frac{f(z, x)}{[1 + f(z, x)]^2} + \frac{x}{\sigma}\,\frac{f(z, \sigma)}{[1 + f(z, \sigma)]^2}, \quad F^*(z, x) = x^{-1}f(z, x).$$

Все остальные экстремальные функции имеют вид $\varepsilon^{-1}F^*(\varepsilon z, x)$, $|\varepsilon| = 1$.

Теорема 2. Экстремальные области в теореме 1 имеют следующий вид:

1. Если $e^{-1} < x \leqslant 1$, то экстремальная область получается из круга радиуса x^{-1} с центром в начале координат проведением двух симметричных радиальных разрезов, концы которых удалены от центра круга на расстояние $(1 + \sqrt{1 - x^2})^{-1}$.

2. Если $x = e^{-1}$, то одна экстремальная область имеет указанный выше вид, а другая получается из круга радиуса e проведением двух разрезов, исходящих из общей точки окружности и образующих угол $\pi/3$.

3. Если $0 < x < e^{-1}$, то экстремальная область получается из круга радиуса x^{-1} проведением радиального разреза и из конца его еще двух разрезов в форме вилки с углом $2\pi/3$. *И. Е. Базилевич*

2634. Об условиях однолистности конформного отображения. Одзава (On the conditions of univalency of conformal mapping. Ozawa Mitsuru), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 3, 84—86 (англ.)

Грунским (Grunsky H., Math. Z., 1939, 45, 29—61) были выведены необходимые и достаточные условия однолистности функции $f(z)$, заданной в некоторой многосвязной области D, в виде выполнения системы неравенств

$$\left|\sum_{\mu,\,\nu=1}^N \nu(A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu})x_\mu x_\nu\right| \leqslant \sum_{\mu,\,\nu=1}^N \nu S_{\mu\nu}x_\mu\overline{x}_\nu$$

для всех N и любых комплексных x_μ, x_ν, где коэффициенты $S_{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ выражаются через канонические функции области и заданную функцию.

Бергман и Шиффер (Шиффер М., Некоторые новые результаты в теории конформных отображений; приложение к книге Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1953, 259) вывели необходимые и достаточные условия однолистности функции точно такого же типа: требуется выполнение неравенств

$$\left| \sum_{\mu,\,\nu=0}^{N} (c_{\mu\nu} + l_{\mu\nu})\, x_\mu x_\nu \right| \leqslant \sum_{\mu,\,\nu=0}^{N} k_{\mu\nu} x_\mu \overline{x_\nu}$$

для всех N и любых комплексных x_μ, x_ν.

В реферируемой заметке автор показал, что:

а) $\pi k_{\mu\nu} = (\mu+1)\, S_{\nu+1,\,\mu+1}$,

б) $\pi l_{\mu\nu} = (\mu+1)\, B_{\nu+1,\,\mu+1}$,

в) $\pi c_{\mu\nu} = -(\mu+1)\, A_{\nu+1,\,\mu+1}$.

Соотношение а) было получено автором ранее (Kôdai Math. Sem. Repts, 1952, № 4, 95—98).

П. П. Белинский

2635. Тождества, относящиеся к каноническим конформным отображениям. Комацу (Identities concerning canonical conformal mappings. Komatu Yûsaku), Kôdai Math. Sem. Repts, 1953, № 3, 77—83 (англ.)

Конечнолистная конечносвязная риманова поверхность, граница которой проектируется в фиксированную окружность (в дальнейшем — в действительную ось) и нигде не вырождается, называется римановой полуповерхностью. Известно, что конечносвязную область D плоскости z с невырождающимися граничными компонентами всегда можно отобразить с помощью аналитической функции на такую поверхность. Если $w(z)$ и $w^*(z)$ отображают одну и ту же область D на две римановы полуповерхности H и H^*, то эти функции связаны соотношением

$$w^*(z) = R\{w(z),\, A[w(z)]\}, \qquad (1)$$

где $A(w)$ — алгебраическая функция, соответствующая замкнутой римановой поверхности, получаемой симметричным продолжением H, а R — рациональная функция своих аргументов.

Дается метод для отображения конечносвязной жордановой области D на риманову полуповерхность. Основная идея — следующая. Пусть $\zeta = F(z)$ конформно отображает D на область, ограниченную аналитическими дугами, принадлежащими семейству кривых $\operatorname{Im}\Omega(\zeta) = \text{const}$, где $\Omega(\zeta)$ — аналитическая функция. Тогда $\operatorname{Im} d\Omega[F(z)] = 0$ на границе области D и функция

$$w(z) = d\hat{\Omega}[\hat{F}(z)] \,/\, d\Omega[F(z)],$$

где $\hat{F}$ и $\hat{\Omega}$ имеют аналогичное значение, отображает D на риманову полуповерхность, если $w(z) \not\equiv \text{const}$. В качестве $\hat{F}(z)$ используются известные отображения на разного рода канонические области. Дается обобщение указанного метода. Приводятся примеры, иллюстрирующие соотношение (1). *Л. И. Волковыский*

2636. Об эффективном определении конформного отображения. Варшавский (On the effective determination of conformal maps. Warschawski S. E.), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 177—183 (англ.)

Пусть R — область, ограниченная замкнутой гладкой кривой $C: z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$ (s — длина дуги кривой C); $w = f(z)$ — функция, конформно отображающая R на круг $|w| < 1$ так, что $z = z_1 \in R$ переходит в $w = 0$, $z = z_2 \in C$ — в $w = 1$; $\theta(s) = \arg f(z(s))$, $\beta(s) = \arg\{[z_2 - z(s)] / [z_1 - z(s)]\}$, $\varphi = \arg[z(t) - z(s)]$, $r_{st} = |z(t) - z(s)|$, $\tau = \tau(t)$ — угол, образуемый касательной к C в точке $z(t)$ с осью x; $K(s,t) = [\sin(\tau - \varphi)] / (\pi r_{st})$.

Приводятся без доказательств некоторые результаты изучения автором сходимости итераций специально для уравнения С. А. Гершгорина (Матем. сб., 1933, **40**, 48—58)

$$\theta(s) = \lambda \int_0^L K(s,t)\, \theta(t)\, dt - 2\beta(s), \quad \lambda = 1. \qquad (1)$$

При предположении, что $\theta_0(s)$ ($\theta_0(L) - \theta_0(0) = 2\pi$) имеет непрерывную производную и $\tau(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера, для

$$\theta_n(s) = \lambda \int_0^L K(s,t)\, \theta_{n-1}(t)\, dt - 2\beta(s), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

указываются оценки вида

$$|\theta_{n+1}(s) - \theta(s)| = \frac{B}{|\lambda_2|^n} \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2| - 1}.$$

Здесь $\theta(s)$ — определенное решение уравнения (1), λ_2 — наименьшее по модулю из характеристических чисел уравнения (1), за исключением $\lambda_1 = 1$ ($|\lambda_2| > 1$). Далее приводятся оценки снизу для $|\lambda_2|$. Две из них могут быть использованы, если известно входящее в оценку соответствующее характеристическое число $\lambda_2 = \mu_2$ для некоторой области, «близкой» к R (например, в первой из оценок, близкой в смысле малости расстояния Фреше между границами областей); третья оценка имеет вид:

$$\lambda_2^{-2} \leqslant \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L (K(s,t) - 1/L)^2\, ds\, dt.$$

В конце работы дана оценка $|\theta_{n+1}(s) - \theta_n(s)|$ для области, «близкой» к некоторой выпуклой области в смысле достаточной малости двойного интеграла от модуля разности между ядрами $K(s,t)$, соответствующими этим двум областям. *П. П. Куфарев*

2637. О емкости общих канторовых множеств. Цудзи (On the capacity of general Cantor sets. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 2, 235—252 (англ.)

Пусть Δ — сегмент на прямой. Возьмем k ($\geqslant 2$) непересекающихся сегментов Δ_{i_1} ($i_1 = 1, \ldots, k$) в Δ, затем k непересекающихся сегментов $\Delta_{i_1 i_2}$ ($i_2 = 1, \ldots, k$) в Δ_{i_1}, и продолжим этот процесс до бесконечности. Пусть $m(M)$ — линейная мера, $d(M)$ — диаметр и $\gamma(M)$ — емкость (или трансфинитный диаметр, который, как известно, равен емкости) некоторого множества M (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат, 1941, гл. V; Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., Гостехиздат, 1952, гл. VII). Множество

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{i_1, \ldots, i_n}^{1, \ldots, k} \Delta_{i_1 \ldots i_n} \Big)$$

называется линейным общим канторовым множеством (о. к. м.), если существуют такие постоянные $a>0$, $b>0$, что для всех n: 1) $d(\Delta_{i_1\dots i_{n-1}\nu}) \geqslant ad(\Delta_{i_1\dots i_{n-1}})$, $\nu=1,\dots,k$; 2) расстояние между $\Delta_{i_1\dots i_{n-1}\mu}$ и $\Delta_{i_1\dots i_{n-1}\nu}$ $(\mu,\nu=1,\dots,k, \mu\neq\nu)$ не меньше $bd(\Delta_{i_1\dots i_{n-1}})$. Канторовы множества, изученные Неванлинна (см. выше), представляют частный случай о. к. м.

Доказывается, что $m(E)=0$ и

$$\gamma(E) \geqslant a^{\frac{1}{k-1}} bd(\Delta) > 0. \qquad (1)$$

Это обобщает результат Неванлинна для обычных канторовых множеств, однако метод доказательства автора отличен от метода Неванлинна, так как автор исходит из определения трансфинитного диаметра по Фекете (Голузин Г. М., см. выше).

Далее автор для плоских о. к. м. оставляет в силе прежнее определение, только под Δ, $\Delta_{i_1\dots i_n}$ следует понимать замкнутые области, ограниченные аналитическими жордановыми кривыми. Для плоских о. к. м. остается справедливым (1). Получен также следующий результат. Пусть $w=F(z)$ — автоморфная функция, принадлежащая группе G типа Шоттки (Форд Л. Р., Автоморфные функции, М. — Л., ОНТИ, 1936), униформизирующая риманову поверхность рода p, $2\leqslant p\leqslant\infty$. Пусть E — множество предельных точек G и автоморфная функция $z=\varphi(\zeta)$ отображает конформно на $|\zeta|<1$ универсальную поверхность наложения дополнения к E. Пусть D — фундаментальная область $\varphi(\zeta)$ и e — часть образа E на $|\zeta|=1$, принадлежащая границе D. Доказывается: 1) $\gamma(E)>0$, $\gamma(e)>0$; 2) если $2\leqslant p<\infty$, то $m(e)=0$.

В конце статьи рассматриваются пространственные о. к. м. *А. А. Гольдберг*

2638. Нелинейная задача Гильберта—Привалова. Погожельский В., Biul. Wojsk. akad. techn. Prace mat., 1953, **2**, № 6, 61—70

Пусть $L_0, L_1, \dots, L_p$ — плоские замкнутые гладкие взаимно не пересекающиеся кривые Жордана, из которых первая содержит внутри себя все остальные, причем линия $L=L_0+L_1+\dots+L_p$ есть граница связной области. Пусть Ω_ν $(\nu=0,1,\dots,p)$ обозначает некоторый пояс, внутри которого находится кривая L_ν.

Рассмотрена следующая нелинейная граничная задача теории аналитических функций: найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линией скачков L по граничному условию

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+\lambda F[t,\Phi^-(t)],\ t\in L, \qquad (1)$$

где $G(z)\neq0$ определена в $\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_0+\overline{\Omega}_1+\dots+\overline{\Omega}_p$ и голоморфна в каждой Ω_ν $(\nu=0,1,\dots,p)$, $F(z,u)$ определена и голоморфна, когда $z\in\Omega$ и $|u|\leqslant R$, λ — параметр.

Пользуясь формулой, дающей решение линейной задачи Гильберта — Привалова (Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946, 97), автор показывает, что при достаточно малом модуле λ все решения задачи (1) даются формулой

$$\Phi(z)=\frac{\lambda}{2\pi i}X(z)\int_L\frac{F[\tau,\varphi(\tau)]\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau-z)}+X(z)P(z),$$

где $P(z)$ — целая функция, удовлетворяющая некоторым условиям, $X(z)$ — решение задачи $\Phi^+=G\Phi^-$, имеющее наименьший возможный порядок на бесконечности (каноническое решение), а $\varphi(t)$ — решение нелинейного сингулярного интегрального уравнения

$$\varphi(t)=-\frac{\lambda}{2}\frac{X^-(t)}{X^+(t)}F[t,\varphi(t)]+$$
$$+\frac{\lambda}{2\pi i}X^-(t)\int_L\frac{F[\tau,\varphi(\tau)]\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau-t)}+X^-(t)P(t). \qquad (2)$$

При отмеченных выше ограничениях на параметр λ и функцию $P(t)$ при помощи метода последовательных приближений показано, что уравнение (2) имеет единственное решение. *Б. В. Хведелидзе*

2639. Нелинейная проблема Гильберта для системы функций. Погожельский В., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 1, 3—4

Пусть L и Ω_ν $(\nu=0,1,\dots,p)$ определяются так же, как в реф. 2638. Рассматривается следующая задача: найти кусочно-голоморфные функции $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z),\dots,\Phi_m(z)$ с линией скачков L, удовлетворяющие на L граничным условиям:

$$\Phi_\alpha^+(t)=G_\alpha(t)\Phi_\alpha^-(t)+$$
$$+\lambda F_\alpha[t,\Phi_1^+(t),\dots,\Phi_m^+(t),\Phi_1^-(t),\dots,\Phi_m^-(t)]$$
$$(\alpha=1,2,\dots,m),$$

где $G_\alpha(z)\neq0$ определены на $\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_0+\overline{\Omega}_1+\dots+\overline{\Omega}_p$ и голоморфны внутри каждого пояса Ω_ν $(\nu=0,1,\dots,p)$; $F_\alpha(z,u_1,\dots,u_{2m})$ голоморфны, когда $z\in\Omega$ и $|u_\nu|\leqslant R$ $(\nu=1,\dots,2m)$.

Обобщая результат своей предыдущей работы (см. реф. 2638), автор утверждает, что при достаточно малом модуле λ все решения задачи даются формулами

$$\Phi_\alpha(z)=\frac{\lambda}{2\pi i}X_\alpha(z)\int_L\frac{F_\alpha[\tau,\varphi_1(\tau),\dots,\varphi_{2m}(\tau)]}{X_\alpha^+(\tau)(\tau-z)}d\tau+$$
$$+X_\alpha(z)P_\alpha(z)\quad(\alpha=1,\dots,m),$$

где $X_\alpha(z)$ — каноническое решение задачи $X_\alpha^+=G_\alpha X_\alpha^-$, $P_\alpha(z)$—некоторые целые функции, а $\varphi_1(t),\dots,\varphi_{2m}(t)$ — решение определенной системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Доказательства в статье не приводятся. *Б. В. Хведелидзе*

2640. Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров. Гегелия Т. Г., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, **15**, № 2, 69—76

Линию Жордана автор называет линией класса B, если: 1) существует такая постоянная $k>0$, что для любых точек $t_1(s_1)$, $t_2(s_2)$ этой линии $|t_1-t_2|\geqslant k|s_1-s_2|$; 2) любую внутреннюю точку t можно поместить между двумя точками t' и t'', находящимися на линии, так, что при непрерывном стремлении их к t существует конечный предел

$$\lim\left(\lg\frac{|t'-t|}{|t''-t|}+i\arg\frac{(t'-t)}{(t''-t)}\right).$$

Линия класса B может иметь бесконечное число таких точек, в которых не существует ни левой, ни правой касательных.

Пусть L — конечная совокупность замкнутых и разомкнутых линий класса B, которые могут иметь счетное число общих точек.

Автор дает решение граничной задачи Гильберта теории аналитических функций (Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М. — Л., 1946, 96) в случае, когда плоскость комплексной переменной разрезана вдоль контура L. Даются также приложения этих результатов к теории сингулярных интегральных уравнений. В статье результаты излагаются без доказательств.

Вопросы, рассмотренные автором, изучались ранее Тржицинским (Trjitzinsky W. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **60**, 167—214) и Д. А. Квеселава (Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1949, **17**, 1—27) в случае, когда L состоит из конечного числа кусочногладких линий, которые могут иметь конечное число общих точек.

Б. В. Хведелидзе

2641. Определение напряжений в пластинке при запрессовке в нее нескольких круглых шайб, нагруженных сосредоточенными силами и моментами. Угодчиков А. Г., Тр. Горьковск. инж.-строит. ин-та, 1953, № 24, 142—146

Решается задача об определении напряжений в однородной изотропной упругой пластинке, имеющей форму многосвязной области S_0 с круговыми отверстиями радиусов r_n'' $(n=1, 2, \ldots, k)$, в которые запрессованы круговые шайбы S_n $(n=1, 2, \ldots, k)$ радиусов r_n' $(r_n' > r_n'')$, когда на внешнем контуре области S_0 задано распределение нагрузки, а к некоторым точкам $z_n \in S_n$ $(n=1, 2, \ldots, k)$ приложены известные сосредоточенные силы $x_n + iy_n$ и сосредоточенные моменты M_n.

Задача сводится к нахождению функций $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ $(n=0, 1, \ldots, k)$, аналитических соответственно в областях S_n, имеющих особенности в точках приложения сосредоточенных сил и моментов и подчиненных определенным граничным условиям.

Выделяя характеристические особенности функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ в точках z_n и используя один способ Д. И. Шермана, автор сводит задачу к первой основной задаче теории упругости.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи служит равенство нулю главного вектора и главного момента всех приложенных к сопряженным телам сил.

Если односвязная область $S_0 + S_1 + \ldots + S_k$ может быть отображена на единичный круг при помощи рациональной функции, то задача решается в конечном виде через интегралы типа Коши.

Разобран пример, когда эта отображающая функция имеет вид $z = R\zeta$.

И. Н. Карцивадзе

2642. Максимальный член и индекс целой функции. Сингх (The maximum term and the rank of an entire function. Singh S. K.), Publs mathematicae, 1953, **3**, № 1—2, 1—8 (англ.)

Пусть $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ — целая функция порядка ρ, $\mu(r) = \max\limits_{n \geqslant 1} |a_n| r^n$ — ее максимальный член и $\nu(r)$ — индекс максимального члена, т. е. $\mu(r) = |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)}$. Пусть $n(r) = n(r, a)$ означает число нулей функции $f(z) - a$ в $|z| \leqslant r$ и $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Ниже пределы рассматриваются при $r \to \infty$.

Число a называется исключительным значением для функции $f(z)$, если

$$\overline{\lim}\, \ln n(r, a) / \ln r = \rho(a) < \rho.$$

Было доказано (Shah S. M., J. London Math. Soc., 1940, **15**, 23—31), что для канонического произведения целого порядка $\rho \geqslant 1$ и рода p ($= \rho$ или $\rho - 1$) равенство

$$\overline{\lim}\, n(r)\, \Phi(r) / \ln M(r) = \infty \qquad (1)$$

имеет место для любой неубывающей положительной функции $\Phi(x)$, удовлетворяющей условию $\int_A^\infty [x\, \Phi(x)]^{-1}\, dx = \infty$.

В первой части реферируемой работы устанавливается ряд аналогичных результатов.

Приведем некоторые из них:

I. 1) Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ $(0 \leqslant \rho < \infty)$ и функция $\Phi(x)$ такова, что $\ln x = o(\Phi(x))$, то

$$L(r) = \nu(r)\, \Phi(r) / \ln M(r) \to \infty.$$

2) Если $0 < \rho < \infty$, то $\overline{\lim}\, L(r) = \infty$ для любой функции $\Phi(x)$, стремящейся к бесконечности.

II. Если $f(z)$ — каноническое произведение целого порядка ρ и рода $p = \rho$ и если $n(r)\, \Phi(r)\, r^{-(p+1)} \geqslant C > 0$, то имеет место равенство (1).

Доказываются также следующие утверждения:

III. $\mu'(r) \geqslant r^{-1} \mu(r)\, \ln \mu(r) / \ln r$, $r > r_0(f)$.

IV. Если $f(z)$ — целая функция, не имеющая нулей в круге $|z| \leqslant 1$, то $M(R) / m(r) \geqslant (R/r)^{N(R)} / \ln R$ $(0 < r < R)$, где

$$M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|,\ m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|,$$

$$N(R) = \int_0^r t^{-1} n(t)\, dt.$$

М. М. Джрбашян

2643. О дифференциальных операторах бесконечного порядка. I. Сиккема (Function-theoretic researches on differential operators of infinite order. I. Sikkema P. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, **A56**, № 5, 465—477; Indagationes math., 1953, **15**, № 5, 465—477 (англ.)

Рассматривается оператор $F(D) = \sum_0^\infty a_n D^n$ со следующей точки зрения: пусть $y(x)$ — целая функция конечного порядка σ и типа τ; каким условиям должны удовлетворять a_n для того, чтобы функция $h(x) = \sum_0^\infty a_n y^{(n)}(x)$ была целой и 1) росла не быстрее $y(x)$ или 2) имела одинаковый рост с $y(x)$? Приводятся без доказательства результаты из книги автора (Differential operators and differential equations of infinite order with constant coefficients. Researches in connection with integral functions of finite order, Groningen, 1953), из которых одни дают ответ на первый вопрос, а другие — на второй вопрос. Типичным примером результата первого рода является следующий:

Если $\sigma > 0$, $\tau < \infty$, a_n таковы, что $G(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!^{1/\sigma}} z^n$ — целая функция, растущая медленнее целой функции первого порядка типа $(\sigma\tau)^{-1/\sigma}$, то $h(x)$ растет не быстрее $y(x)$.

Типичными примерами результатов второго рода являются такие:

1. Если $0 < \sigma < 1$, $0 < \tau < \infty$ или $0 < \sigma \leqslant 1$, $\tau = 0$ и a_n удовлетворяют предыдущему условию, то $h(x)$ и $y(x)$ имеют одинаковый рост (т. е. имеют равные порядки и равные типы).

2. Если $\sigma = 1$, $0 < \tau < \infty$ и a_n, кроме предыдущего условия, удовлетворяют дополнительному условию: функция $F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ (регулярная при $|z| \leqslant \tau$) не обращается в нуль в $|z| \leqslant \tau$, то $h(x)$ и $y(x)$ имеют одинаковый рост.

Ставится вопрос о том, какие дополнительные условия надо наложить на a_n для того, чтобы функции $h(x)$ и $y(x)$ имели одинаковый рост в случаях, когда $\sigma = 1$, $\tau = \infty$ или $\sigma > 1$. Решение этого вопроса, повидимому, будет дано в продолжении, а в этой статье приведено только несколько простых лемм. *А. Ф. Леонтьев*

2644. О тэта-функциях Фукса. Сатакэ (Theta-Fuchs 函數について. 佐武一郎), 數學 (Сугаку), 1953, 5, № 2, 73—81 (япон.)

Устанавливаются некоторые свойства тэта-рядов Пуанкаре порядка m

$$\Theta(z; H(z)) = \sum_{\varphi \in \Gamma} H\{\varphi(z)\} \left(\frac{d\varphi(z)}{dz}\right)^m,$$

где $\varphi(z) = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ — дробно-линейная подстановка, сохраняющая единичный круг C, Γ — автоморфная группа таких подстановок типа Фукса 1-го вида, т. е. имеющих окружность C своим предельным множеством, и $H(z)$ — рациональная функция, регулярная на C.

Форма называется фуксовой или пикообразной, если соответствующая ей фундаментальная область имеет конечное число вершин, целиком лежащих внутри круга C (внутренность круга C будем обозначать через R), и конечное число параболических вершин, т. е. вершин на окружности C.

Форма считается порядка m, если при подстановке группы она приобретает множитель $(\gamma z + \delta)^{2m}$.

Доказываются пять лемм и три следующие теоремы:

Теорема 1. Для $m \geqslant 2$ $\Theta(z; H(z))$ является фуксовой (пикообразной) формой (это — теорема Пуанкаре, см. Poincaré H., Acta math., 1882, 1, 193—294). И обратно, всякая фуксова форма может быть представлена рядом вида $\Theta(z; H(z))$.

Теорема 2. Пусть

$$\Lambda(z; G(z)) = \sum_{\substack{a \in R \\ a \not\equiv z \pmod{\Gamma}}} \operatorname{Res}_a G(a)\, \Theta\left(a; \frac{1}{z-a}\right) da,$$

где $G(z)$ — рациональная функция, удовлетворяющая условию: в круге R суммарный вычет $G(z) \times \Theta(z)\, dz$ равен 0.

Тогда: 1) $\Lambda(z; G(z))$ есть фуксова форма порядка $1-m$ и 2) всякая фуксова форма порядка $1-m$ есть $\Lambda(z; G(z))$.

Теорема 3. Пусть $H(z)$ — рациональная функция, регулярная в R, и главная часть ее разложения в кольце $1 < |z| < \infty$ не имеет членов степени -1 и $1-2m$. Пусть

$$G(z) = (2m-1) \int_0^{1/z} \overline{H}(u)\,(1 - zu)^{2m-2}\, du.$$

Тогда для того чтобы тэта-ряд $\Theta(z; H(z))$ порядка m тождественно равнялся 0, необходимо и достаточно, чтобы в круге R суммарный вычет $G(z)\,\Theta(z)\,dz$ был равен 0. *Г. П. Боев*

2645. Общий принцип, включающий категории Бэра, с приложениями к теории функций и другим областям. Баджёмил, Зейдель (A general principle involving Baire category, with applications to function theory and other fields. Bagemihl F., Seidel W.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1953, 39, № 10, 1068—1075 (англ.)

Пусть S — непустое полное метрическое пространство, $\{P_n(s)\}$ — собрание конечного или счетного числа свойств, каждое из которых имеет смысл для любого элемента $s \in S$, и $Q(s)$ — одновременное их отрицание. Доказывается, что если для каждого $P_n(s)$: 1) из его выполнения на множестве, всюду плотном на непустом открытом множестве $G \subseteq S$ следует, что оно выполняется на G; 2) всякое непустое открытое множество G содержит элемент, для которого $P_n(s)$ не выполняется,—то существует множество R второй категории на S, каждый элемент которого обладает свойством $Q(s)$.

Даны приложения этого общего теоретико-множественного принципа к хаусдорфовым пространствам, ведущие, в частности, к диофантовой теореме о приближении, затем — к теории граничных значений мероморфных функций. Приведем некоторые теоремы.

Пусть $\{j\}$ — множество целых чисел и $\{t_m\}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Тогда существует множество действительных чисел R второй категории такое, что для любого $r \in R$ множество $\{t_m r + j\}$ всюду плотно на множестве действительных чисел.

Пусть функция $f(z)$ мероморфна в круге $|z| < 1$ и G — область ее значений. Тогда, если множество предельных значений $f(z)$ в каждой точке дуги A окружности $|z| = 1$ есть $\overline{G}$, то существует множество $R \subseteq A$ второй категории такое, что множество радиальных предельных значений $f(z)$ в каждой точке $r \in R$ совпадает с G.

Пусть при тех же обозначениях P — множество второй категории на A, положительной меры на каждой дуге $\gamma \subset A$. Тогда, если множество радиальных предельных значений $f(z)$ в каждой точке A содержит фиксированную постоянную c (конечную или бесконечную), но не заполняет всю плоскость, то $f(z) \equiv c$.

Автор указывает также на существование примера отличной от постоянной функции $f(z)$, мероморфной в круге $|z| < 1$, такой, что для каждой точки $e^{i\theta}$ $\lim f(z) = 0$ при стремлении z к $e^{i\theta}$ почти по всем сегментам с концом в точке $e^{i\theta}$. *И. Н. Песин*

2646. Вариационные методы в теории римановых поверхностей. Шиффер (Variational methods in the theory of Riemann surfaces. Schiffer Menahem), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 15—30 (англ.)

Для решения экстремальных задач теории конформных отображений важно уметь определять вариации соответствующих функционалов при разного рода деформациях основной области. Особое значение при этом имеет нахождение вариаций функций Грина и Неймана, если рассматриваемая область есть риманова поверхность с краем (топологически замкнутая поверхность с дырами), и абелевых интегралов 3-го рода с их периодами, если рассматривается замкнутая риманова поверхность. Однако, если воспользоваться удвоением (the double) F римановой поверхности R с краем ($F = R + \tilde{R}$, $\tilde{R}$ — второй экземпляр R; для «одинаковых» точек p и $\tilde{p}$ поверхностей R и $\tilde{R}$ локальные параметры берутся комплексно сопряженными, z и $\bar{z}$, причем на границе они должны соответствующие «полуокрестности» отображать на верхний, соответственно нижний, полукруги полной круговой окрестности с центром на действительной оси), то функции Грина и Неймана легко выражаются через интегралы 3-го рода $\Omega_{qq_0}(p)$ с логарифмическими полюсами разного знака в q и q_0 и однозначной действительной частью:

$$G(p,q) = \frac{1}{2}[\Omega_{q\tilde{q}}(p) - \Omega_{q\tilde{q}}(\tilde{p})],$$

$$N(p;q,q_1) = \frac{1}{2}[\Omega_{q\tilde{q}}(p)+\Omega_{q\tilde{q}}(\tilde{p})-\Omega_{q_1\tilde{q}_1}(p)-\Omega_{q_1\tilde{q}_1}(\tilde{p})].$$

Если деформированная поверхность R^* получается из R удалением параметрического круга $|z| < \rho$ и последующим отождествлением точек z, $|z| = \rho$, переходящих в одну и ту же точку $z^* = z + e^{2i\varphi} \times \times \rho^2/z\,(0 \leqslant \varphi < \pi)$, то для нормального интеграла 3-го рода $W(p, p_0; q, q_0)$, симметричного относительно обеих пар аргументов, вариация имеет вид

$$\delta W = W^*(p, p_0; q, q_0) - W(p, p_0; q, q_0) = \\ = e^{2i\varphi}\rho^2 W'(t, t_0; p, p_0)\,W'(t, t_0; q, q_0) + O(\rho^2)$$

(дифференцирование по t). Отсюда получаются формулы для δG, δN и др. Затем рассматриваются вариации, изменяющие топологический тип R, сохраняющие конформный тип, вариации и некоторые экстремальные задачи, связанные с погружением ($\mathfrak{M} \subset R$, деформируется R), а также случай деформации поверхностей, заданных с помощью квадратичной формы ds^2 (выход в теорию квазиконформных отображений и некоторых уравнений эллиптического типа). Изложение очень сжатое (подробнее см. книгу Schiffer M., Spencer D., Functionals on finite Riemann surfaces, Princeton, 1954). *Л. И. Волковыский*

2647. Аналитические функции и дифференциальные формы. Северн (Funzioni analitiche e forme differenziali. Severi Francesco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 1, 125—140 (итал.)

Реферируемый доклад на IV конгрессе математиков Италии содержит ряд приложений общей теории замкнутых внешних дифференциальных форм к теории функций от нескольких комплексных переменных. Отмечается, что понятию вычета в теории функций двух комплексных переменных посвятили свои работы Стилтьес, Пуанкаре и Пикар.

Пусть R — область, в которой задана дифференциальная форма ω порядка k, ν — размерность R, I — множество особенностей ω, δ — размерность I, τ — некоторый цикл размерности k. Если $k+\delta+1<\nu$, то интеграл $\int_\tau \omega$, вообще говоря, равен нулю, поскольку в этом случае любой k-мерный цикл в $R-I$ гомологичен нулю. Если $k + \delta + 1 = \nu$, то $\int_\tau \omega$ можно представить в виде суммы интегралов по столь малым циклам, что пленка, натянутая на любой из них, пересекается с I только в одной точке. Если $k + \delta + 1 > \nu$, то τ, вообще говоря, пересекается с I, однако это не значит, что интеграл обязательно расходится. Этот случай и является наиболее интересным. В докладе приводятся некоторые примеры, большинство из которых связано с интегральными формулами в теории функций многих комплексных переменных.

Рассматриваются следующие формулы, в которых $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$:

1) Формула Сегре

$$Nf(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\sigma_n}\frac{f(x)}{\prod_1^n (x_\alpha - \xi_\alpha)}\,dv_x,$$

где N — некоторое целое число и $dv_x = dx_1 \ldots dx_n$.

2) Формула Мартинелли (Бохнера)

$$f(\xi) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \times \\ \times \int_{\sigma_{2n-1}} \frac{f(x)\sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha-1}(\bar{x}_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)\,dv_{x\bar{x}}/d\bar{x}_\alpha}{\left(\sum_1^n |x_\alpha - \xi_\alpha|^2\right)^n},$$

где

$$dv_{x\bar{x}}/d\bar{x}_\alpha = dx_1 \ldots dx_n d\bar{x}_1 \ldots d\bar{x}_{\alpha-1} d\bar{x}_{\alpha+1} \ldots d\bar{x}_n.$$

3) Формула Каччопполи

$$S = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\sigma \frac{1}{fg}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\,dxdy,$$

где S — некоторое целое число.

4) Формула Виртингера

$$\frac{1}{2\pi i\,(2i)^{2n-1}}\int_{\sigma_{2n-1}} (d\ln f)\sum_{\alpha=1}^n dv_{x\bar{x}}^{(\alpha)} = v_{2n-2} - w_{2n-2},$$

где $dv_{x\bar{x}}^{(\alpha)} = dx_{\alpha+1} \ldots dx_{\alpha+n-1} d\bar{x}_{\alpha+1} \ldots d\bar{x}_{\alpha+n-1}$,

v и w — соответственно объемы множеств полюсов и нулей функции $f(x)$. *И. И. Пятецкий-Шапиро*

2648. К теории функций бикомплексной переменной. Райли (Contributions to the theory of functions of a bicomplex variable. Riley James D.), Tôhoky Math. J., 1953, 5, № 2, 132—165 (англ.)

Бикомплексным числом называется упорядоченная пара (a, b) обыкновенных комплексных чисел a и b при условии следующего определения равенства, суммы и произведения этих пар:

$(a, b) = (c, d)$, если $a = c$, $b = d$;
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
$(a, b)\cdot(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Поэтому $(a, b) = a + bj = (a - bi)\, e_1 + (a + bi)\, e_3$, где $a = (a, 0)$, $b = (b, 0)$, $j = (0, 1)$, i — обыкновенная мнимая единица, $e_1 = \frac{1}{2}(1 + ij)$, $e_3 = \frac{1}{2}(1 - ij)$ (автор обозначает: $e_2 = ie_1$, $e_4 = ie_3$). Положим

$$z = x + jy = z_1 e_1 + z_3 e_3, \quad f(z) = u(x, y) + jv(x, y) = g(z_1)\, e_1 + h(z_3) e_3, \quad \| z \| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2},$$
$$|z| = \sqrt{|x^2 + y^2|};$$

x, y, z_1, z_3, u, v — обыкновенные комплексные переменные, причем $z_1 = x - iy$, $z_3 = x + iy$; $g(z_1)$ $(h(z_3))$ — однозначно определенная комплекснозначная функция от z_1 (z_3) в некоторой области T_1 (T_3) плоскости z_1 (z_3). Функция $f(z)$ называется аналитической в данной точке $z_0 = x_0 + jy_0$ $(x_0 - iy_0 \in T_1$, $x_0 + iy_0 \in T_3)$, если существует бикомплексное число $f'(z_0)$, при котором всякому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что

$$\left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| < \varepsilon$$

(где $z = z_1 e_1 + z_3 e_3$; $z_1 \in T_1$; $z_3 \in T_3$) всякий раз, когда $\| z - z_0 \| < \delta_\varepsilon$, $|z - z_0| \neq 0$ (при последнем условии возможно, очевидно, деление всякого бикомплексного числа на $z - z_0$). Автор ставит в соответствие паре плоских областей T_1 и T_3 область T четырехмерного евклидова пространства, относя каждой паре (z_1, z_3), где $z_1 \in T_1$, $z_3 \in T_3$, точку такого пространства, координаты которой — действительные и мнимые части чисел z_1 и z_3. Доказывается теорема разложения Ринглеба (Ringleb F., Rend. Circolo mat. Palermo, 1933, **57**, 311—340) применительно к $f(z)$, состоящая в том, что для всякой бикомплексной аналитической $f(z)$ в области T найдется такая единственная пара комплексных функций $g(z_1)$, $h(z_3)$, аналитических соответственно в областях T_1 и T_3, для которых получим в T:

$$f(z) = g(z_1)\, e_1 + h(z_3)\, e_3. \qquad (1)$$

Наоборот, для всякой пары функций $g(z_1)$ и $h(z_3)$ с указанными свойствами бикомплексная функция $f(z)$, определяемая по формуле (1), будет аналитической в T; при этом

$$f'(z) = \frac{dg}{dz_1} e_1 + \frac{dh}{dz_3} e_3.$$

Из других результатов автора отметим теорему о разложимости $f(z)$ в ряд Тейлора в некоторой окрестности каждой точки области T, в которой $f(z)$ аналитическая, а также аналоги теоремы и формулы Коши и теорему об отсутствии изолированных особых точек у аналитической $f(z)$. *В. С. Федоров*

2649. Функции гиперкомплексной переменной в N-мерном пространстве. Сопряженные функции. Рошкулец (Funcţii de o variabilă hipercomplexă în spaţiul cu N dimensiuni. Funcţii conjugate. Roşculeţ Marcel N.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române. Sec. mat. şi fiz., 1953, **5**, № 3, 415—422 (рум.; резюме русс., франц.)

Реферируемая статья является продолжением предыдущей статьи автора (РЖМат, 1955, 186).

Автор называет сопряженными функциями действительные функции U_0, $U_1, \ldots, U_{n-1}$ точки $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ какой-нибудь области E_n n-мерного евклидова пространства, если гиперкомплексная функция $f(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k U_k$ является моногенной от гиперкомплексной переменной $\omega = \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k x_k$ в области E_n. Здесь θ — гиперкомплексная единица, подчиненная условию $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \theta^{n-k} = 0$, где λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — действительные постоянные $(\lambda_0 \neq 0)$.

Функция U_0 должна удовлетворять в области E_n системе дифференциальных уравнений:

$$\partial A_{hj} / \partial x_{h+k} = \partial A_{hk} / \partial x_{h+j},$$

где

$$A_{hk} = \sum_{i=0}^{h} \frac{\lambda_{n-i}}{\lambda_n} \frac{\partial U_0}{\partial x_{k+i}} - \sum_{i=0}^{n-h-1} \frac{\lambda_{n-h-i-1}}{\lambda_n} \frac{\partial U_0}{\partial x_{h-k+i}}$$

(A_{hj} аналогично); при $n = 2$, $\lambda_0 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$ эта система переходит в уравнение Лапласа.

Автор предполагает, что в E_n U_0 имеет непрерывные частные производные 2-го порядка по $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, а $U_1, \ldots, U_{n-1}$ имеют непрерывные частные производные 1-го порядка.

С помощью известных формул Остроградского—Грина выводится интегральная формула, которая выражает значение U_0 в некоторой точке a через значения этой функции на некоторой специально подобранной замкнутой кривой C^* и значения частных производных 1-го порядка этой функции на C^* и на некоторой поверхности σ, ограниченной кривой C^*, содержащей a и содержащейся в E_n (точка a принадлежит двумерной области на поверхности σ, ограниченной кривой C^*). Получены также соотношения между значениями сопряженных функций в точке a и значениями этих функций и их частных производных 1-го порядка на кривой C^*.

В. С. Федоров

2650. Об одном свойстве решений обобщенной системы уравнений Коши—Римана. Векуа И. Н., Сообщ. АН ГрузССР, 1953, **14**, № 8, 449—453

Рассматривается система уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — действительные непрерывные функции x, y в конечной области T плоскости $z = x + iy$, ограниченной конечным числом жордановых кривых.

Автором (и независимо от него Берсом) доказано ранее, что для любого регулярного в T решения $u(x, y) + iv(x, y) = U(z)$ системы (1) функция

$$\varphi(z) = U(z) \exp\left\{ -\frac{1}{\pi} \iint_T \frac{A(t)U(t) + B(t)\overline{U(t)}}{U(t)(t - z)}\, dT \right\},$$

где $A = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib)$, $B = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib)$, $\overline{U} = u - iv$, является голоморфной в T. Регулярным здесь называется решение, имеющее непрерывную производную $\partial U / \partial \bar{z}$ в смысле Помпейю. С помощью этого результата на решения системы (1) распространяется ряд основных свойств аналитических функций. В реферируемой работе дается новое его дока-

зательство, не использующее результатов Карлемана, который впервые исследовал систему (1). Доказательство опирается на комплексную запись системы (1), свойства производной в смысле Помпейю и результаты работы автора (Матем. сб., 1952, **31 (73)**, № 2, 217—314). *Б. В. Шабат*

2651. О поверхностях наложения. Курамоти (On covering surfaces. Kuramochi Zenjiro), Osaka Math. J., 1953, **5**, № 2, 155—201 (англ.)

Пусть R — риманова поверхность с нулевой границей, R^* — расширение R за счет ее идеальных граничных точек, определяемых с помощью исчерпания R, и с естественно возникающей топологией (Kuramochi Z., Osaka Math. J., 1951, **3**, 123—174), R — наложение R, $f(z)$ — отображение R в R, R^∞ — универсальное наложение R. Если R^* — метрическое пространство, то на R определяются достижимые граничные точки (д. г. т.) с помощью метрики, переносимой с R^* (расстояние между p_1, $p_2 \in R$ определяется как нижняя граница диаметров проекций на R кривых, соединяющих p_1, p_2 на R). Для R с положительной границей с помощью исчерпания $R_n \nearrow R$, функций Грина g_n и нормального потенциала 3-го рода $U(p; a, b)$ на R определяется для $f(z)$ аналог функций Неванлинна m, N и T (рассматривается $U[f(z); a, b]$ на R_n и формула типа Йенсена). Автор называет R наложением ограниченного вида, если характеристика T равномерно ограничена, и дает обобщение теоремы Фату: если $z = \varphi(\zeta)$ отображает $|\zeta| < 1$ на R^∞, то $f[\varphi(\zeta)]$ почти всюду на $|\zeta| = 1$ имеет угловые предельные граничные значения. Затем с помощью нижней огибающей определенных супергармонических функций вводятся и изучаются гармонические меры множеств д. г. т. R, R^∞, $\tilde{R}$, $\tilde{R}^\infty$ ($\tilde{R}$ получается из R удалением некоторых точек), взаимоотношения между ними и связанные с этим вопросы типа поверхности. Развивая работу Оцука (Obtsuka M., Nagoya Math. J., 1951, **3**, 91—137), автор доказывает разрешимость задачи Дирихле в смысле Перрона—Брело (Brelot M., Acta litt. ac scient. Szeged, 1939, **9**, 133—153) для полунепрерывных граничных значений в предположении, что R есть наложение F-типа ($f[\varphi(\zeta)]$ имеет почти всюду на $|\zeta| = 1$ угловые предельные значения), и делает заключение о множестве иррегулярных д. г. т.

Далее изучается топология Мартина, которая вводится на R с положительной границей (Martin R. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1941, **49**, 137—172), и, в частности, показывается, что гипотеза Мартина о нигде не плотности на идеальной границе множества так называемых неминимальных точек, вообще говоря, не верна (строится пример).

Известно, что поверхность с нулевой границей обладает свойством Гросса (Noshiro K., Nagoya Math. J., 1951, **3**, 73—79). Автор строит поверхность класса O_{HP}, не обладающую свойством Гросса.

Л. И. Волковыский

2652. К. Коллоквиум по функциям многих переменных (Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, 161 pp., Paris, Masson, 1953, 1 800 fr.), Bibliogr. France, 1954, **143**, ч. 1, № 14, 317 (библ.)

См. также: 2528, 2563, 2577, 2617 К, 2667, 2675, 2701, 2711, 2721, 2732, 2735—2737, 2743, 2744, 2752, 2836, 2869, 2899 К.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2653. Нормальные системы дифференциальных уравнений 1-го порядка, допускающие специальные инвариантные соотношения, представляющие интерес для движений голономных систем. Агостинелли (Sistemi di equazioni differenziali normali del I ordine che ammettono speciali relazioni invarianti e che interessano il movimento di sistemi anolonomi. Agostinelli Cataldo), Boll., Unione mat. ital., 1954, **9**, № 2, 136—141 (итал.)

Рассматривается автономная система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Независимые соотношения

$$\omega_r(x_1, \ldots, x_n) = \text{const} \quad \left(r = 1, \ldots, k;\ k < \frac{n}{2}\right) \tag{2}$$

называются относительными инвариантами системы (1), если они обращаются в тождество для ее решений специального вида:

$$x_1 = x_1(t), \ldots, x_{n-h} = x_{n-h}(t),$$
$$x_{n-h+1} = c_1, \ldots, x_n = c_h \tag{3}$$

($k \leqslant h < \frac{n}{2}$; $c_1, \ldots, c_h$ — постоянные). Вообще говоря, соотношения (2) не являются первыми интегралами системы (1). Доказывается следующая теорема: Для того чтобы система (1) допускала k независимых инвариантов (2) относительно квазистационарных решений (3) (в предположении существования таких решений) в общем случае необходимо и достаточно тождественное выполнение в соответствующих областях условий:

$$\sum_{i=1}^{n-h} F_i \frac{\partial \omega_r}{\partial x_i} = 0 \quad (r = 1, \ldots, k),$$

$$\sum_{i=1}^{n-h} F_i \frac{\partial F_{n-h-j}}{\partial x_i} = 0 \quad (j = 1, \ldots, h).$$

Устанавливается, что при выполнении обычных условий существования соответствующих неявных функций множество квазистационарных решений (3) системы (1) зависит от $n-h$ произвольных постоянных. *Б. П. Демидович*

2654. Заметка об интегральных инвариантах. Блок (A remark on integral invariants. Block H. D.), Quart Appl. Math., 1954, **12**, № 2, 201—203 (англ.)

Пусть переменные q_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ связаны при помощи канонического преобразования с переменными Q_i, P_i. Если задать функции $q_i(u, v)$, $p_i(u, v)$ в точках квадрата $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, то в плоскости (q_i, p_i) будет определена область s_i, которой соответствует область S_i плоскости (Q_i, P_i).

В некоторых курсах классической механики (Goldstein, Classical Mechanics, Addison Wesley, 1950, 247—250; Corben and Stehle, Classical Mechanics, Wiley, 1950, 292—293) утверждается, что

$$\sum_{i=1}^{n} \iint_{s_i} dq_i\, dp_i = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} dQ_i dP_i.$$

Автор приводит простой пример, когда это равенство не выполняется и ставит вопрос о правильной формулировке условия инвариантности. При помощи соображений, основанных на формуле Грина, устанавливается формула:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i} \iint_{s_i} dq_i\, dp_i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\rho_i} \iint_{S_i} dQ_i dP_i,$$

где σ_i и ρ_i принимают значения 0 или 1 в зависимости от того, обходится ли область в положительном или отрицательном направлении.

Примечание референта. Точная формулировка интегрального инварианта второго порядка канонических преобразований выражается через внешние формы Картана в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \iint_{s_i} [dq_i\, dp_i] = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} [dQ_i dP_i].$$

И. С. Аржаных

2655. О теореме единственности для дифференциальных уравнений механики. Сбрана (Sul teorema di unicità per le equazioni differenziali della meccanica. Sbrana Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 2, 123—127 (итал.)

Рассматривается свойство некоторой материальной системы оставаться в покое, если отсутствуют начальные скорости и ускорения ее точек, а активные силы, действующие на систему, и связи удовлетворяют соответствующим условиям. Пусть S — система материальных точек A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, отнесенная к неподвижным декартовым координатам x, y, z, подчиненная двусторонним связям

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{(l)} \times \delta A_i = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, k).$$

Система S находится под воздействием активных потенциальных сил $F_i(A_i)$, непрерывных вместе с первыми частными производными. Уравнения движения будут:

$$m_i \frac{dV_i}{dt} = F_i + \Phi_i, \qquad (1)$$

где Φ_i — реакции, развитые связями в течение рассматриваемого движения,

$$\Phi_i = \sum_{h=1}^{k} \lambda_h \Phi_i^{(h)}, \quad \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{(h)} \times V_i = 0.$$

Показывается, что к нормальной системе дифференциальных уравнений, которая получается из (1) исключением λ_h, применима теорема единственности; система остается в покое, если нет начальных скоростей и ускорений. *Ю. А. Митропольский*

2656. О регулярных интегралах в смысле Фукса некоторых систем дифференциальных уравнений. Жермэ (Sur les intégrales régulières au sens de Fùchs de certains systemes d'equations différentielles. Germay R. H.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, **67**, сер. 1, № 2, 69—76 (франц.)

В первой части рассматривается уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{f_1(x)}{x-a}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + \frac{f_n(x)}{(x-a)^n} y = 0 \qquad (1)$$

в предположении, что функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ голоморфны в точке a и ее окрестности и что хотя бы одно слагаемое в (1) имеет существенный полюс.

Для регулярных в смысле Фукса интегралов уравнения (1), т. е. интегралов вида

$$y_k = (x-a)^{\theta_k} u_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где θ_k — корни определяющего уравнения, а

$$u_k(x) = \Sigma_p \gamma_{k,p} (x-a)^p,$$

выводится общая формула для коэффициентов $\gamma_{k,p}$. Эти коэффициенты — рациональные функции корней определяющего уравнения.

Во второй части результат распространяется на системы вида

$$\frac{dy_j}{dx} + \frac{1}{x-a}[f_{j,1}y_1 + f_{j,2}y_2 + \cdots + f_{j,n}y_n] = 0, \qquad (2)$$

где $f_{j,k}(x) = \Sigma_p a_{j,k}^{(p)} (x-a)^p$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть θ^* — корень определяющего уравнения системы (2):

$$F(\theta) = |\, a_{ij}^{(0)} + \theta E \,| = 0,$$

имеющий наибольшую вещественную часть. Тогда система (2) имеет решения вида

$$y_1 = (x-a)^{\theta^*} \varphi_1(x), \ldots, y_n = (x-a)^{\theta^*} \varphi_n(x),$$

где $\varphi_k(x) = \Sigma_p \gamma_k^p (x-a)^p$. Для коэффициентов γ_k^p выведены явные формулы, выписанные в заключительной части работы. *И. З. Штокало*

2657. О дифференциальных системах, происходящих из мультипликативных классов с экспоненциальными особенностями. III. Рёрль (Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. III. Röhrl Helmut), Math. Ann., 1953, **125**, № 5, 448—466 (нем.)

Продолжение статей автора под тем же названием (Math. Ann., 1951, **123**, № 1, 53—75; 1952, **124**,

№ 2, 187—218). Обобщаются изучаемые в предыдущих статьях функции вида

$$\prod_{\nu=0}^{n}(z-a_\nu)^{\alpha_\nu}\exp r(z),$$

где a_ν, α_ν — комплексные величины, $r(z)$ — рациональная функция. Постоянные a_ν и коэффициенты функции $r(z)$ зависят теперь от параметра u. Соответственно этому изменяются полученные ранее результаты. Как примеры рассмотрены обобщения систем функций Эрмита, Бесселя и Куммера в том смысле, в каком Шлезингер обобщил гипергеометрическую функцию (Schlesinger, Math. Z., 1928, 28, № 3, 504—518), во всех трех случаях изучена связь между интегральными матрицами данной дифференциальной системы и ей сопряженной.

К. Я. Латышева

2658. **Об особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.** Кимура Тошифуса (Sur les points singuliers des equations differentielles ordinaires du premier ordre. Kimura Toshifusa), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1954, **2**, № 2, 47—53 (франц.)

Исследуются неподвижные существенно-особые точки уравнения

$$F(x,y,y')=0, \qquad (1)$$

где F — полином относительно y, y', с голоморфными относительно x коэффициентами. Пусть $x=0$ — рассматриваемая существенно-особая точка,

$$F(x,y,y')=\sum_{k=0}^{n}x^{\sigma_k}y'^k F_k(x,y),$$

F_k — неприводимые полиномы по y, коэффициенты которых голоморфны в окрестности $x=0$; $\sigma_k\geqslant 0$ — целые числа, по крайней мере одно из которых, например σ_m, равно нулю, причем $F_m(x,y)\neq 0$; $\sigma_0>0$.

Доказано, что при произвольно малых значениях x любой интеграл уравнения (1), для которого $x=0$ — существенно-особая точка, принимает множество значений, занимающее всю комплексную плоскость, за исключением бесконечно удаленной точки и тех точек y, в которых обращаются в нуль $F_0(0,y)$, $F_m(0,y)$ и $D_0(0,y)$, если дискриминант $D(x,y)$ полинома $F(x,y,y')$ относительно y имеет вид

$$D(x,y)=x^{\mu}D_0(x,y), \qquad \mu\geqslant 0.$$

Работа продолжает исследования автора (Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1953, 2, № 2, 23—28). Ранее рассматривалось уравнение $y'=P(x,y)/Q(x,y)$, где P и Q — полиномы относительно y с голоморфными коэффициентами.

Г. Л. Мизернюк

2659. **Заметка о решении дифференциальных уравнений Хеуна в специальном случае.** Макай (A note on the solution of Heun's differential equation in a special case. Makai E.), Publs mathematical, 1954, **3**, № 1—2, 140—143 (англ.)

Построена функция

$$w=y^{-b}(z-x)^{-b}F\left(a,b,c,\frac{z-y}{y}\frac{x}{z-x}\right), \qquad (1)$$

где a, b, c — постоянные, а $F(a,b,c,\xi)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. w удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-y}+\frac{C}{x-z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{Dx+Fy+Cz}{x(x-y)(x-z)}w=0. \qquad (2)$$

Коэффициенты A,B,C и a,b,c однозначно определяются друг через друга, а D,E,G связаны с ними некоторыми соотношениями. Перемещая в (2) x,y,z в циклическом порядке, можно получить еще два уравнения аналогичного вида, которым также удовлетворяет функция w. Если y,z рассматривать как постоянные, (2) превратится в обыкновенное дифференциальное уравнение типа Хеуна, решением которого будет служить функция w от переменного x, в которую y, z входят в качестве параметров.

Приведены другие примеры построения решений обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками, удовлетворяющих одновременно некоторым уравнениям в частных производных.

Г. Л. Мизернюк

2660. **О непосредственном интегрировании одной однородной системы линейных дифференциальных уравнений с ω-циркулянтной матрицей.** Амато (Sull'integrazione immediata di un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee a matrice circolante ω. Amato V.), Giorn. mat. Battaglini, 1954, **82**, № 1, 233—236 (итал.)

Рассматривается система

$$y_i'=\omega\sum_{j=1}^{i-1}a_{k+n}y_j+\sum_{j=i}^{n}a_k y_i \quad (1\leqslant i\leqslant n),$$

где $k=j-i+1$, ω — действительное число, a_ν $(1\leqslant r\leqslant n)$ — действительные функции действительной переменной, интегрируемые на некотором интервале. Общее решение и решение задачи Коши просто выражаются через собственные значения матрицы системы, которые в свою очередь выражаются через ω и a_γ. Матрицант Пеано—Бекера (Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1953, гл. II, § 2) в этом случае оказывается матрицей, построенной подобно матрице исходной системы.

Г. К. Энгелис

2661. **Решение одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка с помощью функциональных рядов.** Бельтюков Б. А., Тр. Иркутского ун-та, сер. физ.-матем., 1953, **8**, № 1, 9—11

Рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\varphi_1(x)\frac{dy}{dx}-\varphi_2(x)y=R(x). \qquad (1)$$

Вводя обозначения

$$P_1=\exp\left[\int\varphi_1(x)\,dx\right],\ P_2=\varphi_2(x)\exp\left[-\int\varphi_1(x)\,dx\right],$$
$$Q=R(x)\exp\left[-\int\varphi_1(x)\,dx\right] \qquad (2)$$

(повидимому, под интегралами понимаются некоторые определенные первообразные функции) и предполагая, что функции (2) ограничены на $[a,b]$, автор получает для общего решения уравнения (1) выражение

$$y=C_1\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\int P_1\int P_2\ldots\int P_1\int P_2\,dx^{2n}\right]+$$

$$+ C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \int P_1 \int P_2 \ldots \int P_1 \int P_2 \int P_1 \, dx^{2n-1} + \quad (3)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int P_1 \int P_2 \ldots \int P_1 \int P_2 \int P_1 \int Q \, dx^{2n},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, причем ряды в правой части (3) сходятся абсолютно и равномерно на $[a, b]$. В заключение формула (3) применяется к некоторым частным случаям уравнения (1).

Отметим, что сходным итеративным методом исследовались решения уравнений второго порядка в работе Ю. В. Руднева (*Уч. зап.* МГУ, 1946, № 100, 113—126). *Б. П. Демидович*

2662. Заметка о приложении вейровой теории матриц к интегрированию линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Борувка (Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systému diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty: Borůvka Otakar), *Časop. pěstov. mat.*, 1954, **79**, № 2, 151—155 (чеш.)

Е. Вейр (Monatsh. Math. und Phys., 1890, № 1) предложил метод приведения матриц к жордановой форме, отличный от метода нормальных делителей Вейерштрасса. В настоящее время его основы известны под названием метода корневых пространств (см., например, Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М.— Л., 1948, стр. 137 и след.). При приведении матрицы A к канонической форме по методу Вейра находятся числа: $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_r, \ldots$, являющиеся дефектами матриц

$$(A - aE)^0, (A - aE)^1, \ldots, (A - aE)^r, \ldots,$$

где a — корень характеристического уравнения $\det(A - aE) = 0$, и далее определяются числа: $\alpha_1 = \nu_1$; $\alpha_2 = \nu_2 - \nu_1$, $\alpha_3 = \nu_3 - \nu_2 \ldots \alpha_r = \nu_r - \nu_{r-1} \ldots$, называемые Вейром характеристическими числами матрицы A, соответствующими корню a. Существенным для последующего применения к дифференциальным уравнениям является нахождение системы «нормальных векторов», определяемых рекуррентными соотношениями

$$(A - aE)\,\mathbf{a}_{\rho\sigma} = \begin{cases} \mathbf{a}_{\rho+1,\sigma} & \text{для } 1 \leqslant \rho \leqslant r-1,\ \sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\rho+1}, \\ 0 & \text{для } \rho = r. \end{cases}$$

Пользуясь этими понятиями, автор устанавливает теорему: Пусть задана система уравнений $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\sqrt{a}$ — корень характеристического уравнения, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_r$ — его характеристические числа, $\mathbf{a}_{\rho\sigma}$ — соответствующая нормальная система векторов. Тогда функции

$$\mathbf{y}_{\rho\sigma} = e^{ax}\left(\mathbf{a}_{\rho\sigma} + \frac{x}{1!}\mathbf{a}_{\rho+1,\sigma} + \cdots + \frac{x^{r-\rho}}{(r-\rho)!}\mathbf{a}_{r\sigma}\right)$$

образуют независимую систему решений, соответствующую корню a. *В. В. Немыцкий*

2663. Новый метод решения однородных систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Чермак (On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients. Čermák J.), *Ann. polon. math.*, 1954, **1**, № 1, 195—202 (англ.)

Рассматривается система n линейных однородных разностных уравнений с комплексными коэффициентами:

$$\mathbf{u}(x+1) = A\mathbf{u}(x), \qquad (1)$$

где $|A| \neq 0$. Пусть a — характеристический корень матрицы A кратности α и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — невозрастающая последовательность натуральных чисел таких, что

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = \alpha$$

являются соответственно дефектами матриц:

$$A - aE, (A - aE)^2, \ldots, (A - aE)^r.$$

Строится система, состоящая из α линейно независимых векторов $\mathbf{a}^{\mu,\nu}$ ($\mu = 1, \ldots, r$; $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}$), обладающая тем свойством, что $\frac{1}{a}(A - aE)$ преобразует $\mathbf{a}^{\mu,\nu}$ в $\mathbf{a}^{\mu+1,\nu}$ (при $\mu \leqslant r-1$) и $\mathbf{a}^{r,\nu}$ — в нулевой вектор. При помощи этих векторов α решений уравнения (1) выражаются следующим образом:

$$\mathbf{u}^{\mu,\nu} = a^x \sum_{k=0}^{r-\mu} \binom{x}{k} \mathbf{a}^{\mu+k,\nu} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, \ldots, r-1 \\ \nu = 1, \ldots, \alpha_{r-\mu+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{r,\nu} = a^x \mathbf{a}^{r,\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, \alpha_s).$$

Аналогично находят решения, соответствующие остальным характеристическим корням матрицы A, и получают фундаментальную систему решений. *А. Г. Школьник*

2664. О системах обыкновенных дифференциальных неравенств, выполняющихся вне некоторого множества. Шарский (Sur les systèmes d'inégalités différentielles ordinaires remplies en dehors de certains ensembles. Szarski Jacek), *Roczn. Polskiego towarz. mat.* (Ann. Soc. polon. math.), 1953, **24**, № 2, 1—8 (франц.)

Рассматривается система дифференциальных неравенств

$$\underline{D}^+\varphi^i(x) \leqslant f^i(x, \varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x)) \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\underline{D}^+$ — верхнее правое производное число. Функции определены и непрерывны в некоторой области Ω и

$$f^i(x, \bar{y}^\nu) \leqslant f^i(x, y^\nu),$$

если $\bar{y}^\nu \leqslant y^\nu$ ($\nu = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$). Обозначим через $y^i = \psi^i(x)$ ($i = 1, \ldots, n$) верхнее правое решение системы уравнений

$$(y^i) = f^i(x, y^1, \ldots, y^n),$$

определенное на отрезке $l: x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$ (определение верхнего правого решения см. Kamke, Acta Math., 1932, 58, 57—85).

Устанавливаются условия, при выполнении которых имеют место неравенства $\varphi^i(x) \leqslant \psi^i(x)$ на отрезке l, если они выполнены в точке x_0. Например, пусть A — множество точек отрезка l, в которых не имеет места хотя бы одно из неравенств

$$\underline{D}^+\varphi^i(x) < f^i(x, \varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x));$$

$\varphi^i(x) \leqslant \psi^i(x)$ на l, если множество A_i значений функции

$$\varphi^i(x) - \int_{x_0}^{x} f^i(x, \varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x))\, dx, \quad x \in A;$$

не содержит никакого сегмента. Устанавливаются и другие условия. *A. Bielecki*

2665. **Замечание о критериях единственности для решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Гальярдо** (Un'osservazione sui criteri di unicità per gli integrali di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Gagliardo Emilio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 1, 214—223 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где вещественная функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, причем $f(x, y) \leqslant g(x)$, $g(x)$ суммируема на $[a, b]$. Пусть для каждого $\alpha \in [a, b)$ можно найти $\bar{\alpha} \in (\alpha, b]$ и функцию $\varphi(x)$, суммируемую на каждом интервале $(\alpha + \delta, \bar{\alpha})$ $(0 < \delta < \bar{\alpha} - \alpha)$, для которой

$$\lim_{0 < \delta \to 0} \Delta = \lim_{0 < \delta \to 0} \int_{\alpha+\delta}^{\bar{\alpha}} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx < +\infty, \tag{2}$$

кроме того, для почти всех $x \in (\alpha, \bar{\alpha})$ и всех $y_1, y_2 \in [c, d]$ $(y_1 > y_2)$ должно быть $f(x, y_1) - f(x, y_2) \leqslant \varphi(x)(y_1 - y_2)$. Тогда непрерывная функция $y(x)$ $(x_0 \leqslant x < x_1;\ a \leqslant x_0 < x_1 \leqslant b)$, имеющая всюду правую производную $D^+y(x)$, для которой всюду $D^+y(x) = f(x, y(x))$, однозначно определяется значением $y(x_0)$. Если, вместо правой производной, брать правую аппроксимативную производную, то теорема верна, если, вместо условия (2), поставить такое: $\overline{\lim_{0 < \delta \to 0}}\ \mathrm{ap}\,\Delta < +\infty$. Если вместо правой производной брать правую верхнюю производную, то условие (2) надо заменить на такое: $\overline{\lim_{0 < \delta \to 0}}\ \Delta < +\infty$.

Наконец, если вместо наличия правой производной требовать всюду конечности правых производных чисел и удовлетворения уравнения (1) почти всюду, то для справедливости теоремы, вместо условия (2), надо потребовать, чтобы $\underline{\lim_{0 < \delta \to 0}}\ \Delta = -\infty$.

На примерах показано, что в первой формулировке, вообще говоря, нельзя допускать невыполнения уравнения (1) хотя бы в одной точке и нельзя заменить $1/(x - \alpha)$ на $k/(x - \alpha)$ $(k > 1)$; в четвертой же формулировке нельзя отказаться от конечности производных чисел даже в одной точке.

А. Д. Мышкис

2666. **Теоремы типа Пуанкаре — Бендиксона для двумерных многообразий, отличных от тора. Хас** (Poincaré — Bendixson type theorems for two-dimensional manifolds different from the torus. Haas Felix), Ann. Math., 1954, **59**, № 2, 292—299 (англ.)

Доказывается, что если на двумерном ориентируемом многообразии M^2, отличном от тора, ω-предельное множество C некоторой траектории C^+ дважды непрерывно дифференцируемого векторного поля не содержит точек покоя, то $\bar{C}$ — замкнутая траектория, которая или совпадает с C^+, или является предельным циклом.

В весьма частном случае даются оценки минимального числа устойчивых предельных циклов на поверхностях рода $p > 1$. *Л. Э. Эльсгольц*

2667. **О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона вблизи положения равновесия. Зигель** (Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Siegel Carl Ludwig), Math. Ann., 1954, **128**, № 2, 144—170 (нем.)

Рассматривается вопрос о возможности приведения системы

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

к некоторой нормальной форме.

Предполагается, что

1) H — ряд по степеням x_k, y_k с вещественными коэффициентами, начинающийся с членов не ниже второго порядка и сходящийся в окрестности точки равновесия $x_k = 0$, $y_k = 0$ системы (1).

2) Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$ — корни характеристического уравнения системы (1), то не существует соотношения вида $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k = 0$ с целыми коэффициентами g_k, по крайней мере один из которых не равен нулю.

Делается замена переменных $x_k = \varphi_k(\xi_i, \eta_i)$, $y_k = \psi_k(\xi_i, \eta_i)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, где φ_k, ψ_k — формальные ряды по степеням всех своих аргументов, а новые переменные — взаимно сопряженные комплексные числа $(\xi_k = \bar{\eta}_k)$. Эта замена приводит (1) к нормальной форме, т. е. сохраняя вид системы, преобразует функцию H в ряд по степеням произведений $\xi_k \eta_k$, причем, если все $\mathrm{Re}\,\lambda_k = 0$, то коэффициенты этого ряда будут чисто мнимыми.

Исследуется сходимость рядов φ_k, ψ_k в случае $n = 2$, $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 = 0$. Ряд $H(x, y)$ рассматривается при этом как точка гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, координатами которой являются коэффициенты этого ряда. Доказано, что те H, для которых имеет место сходимость φ_k, ψ_k, образуют в $\mathfrak{H}$ множество первой категории в смысле Бэра. Множество H, соответствующих расходимости, является множеством второй категории.

Как указывает автор, работа не дает приема для исследования сходимости φ_k, ψ_k в конкретных случаях, однако всегда можно привести к нормальному виду конечное число первых членов ряда H, сделав остаток малой величиной произвольного порядка. *Г. Л. Мизернюк*

2668. **Существование периодического решения одного дифференциального уравнения. Касахара** (On the existence of periodic solutions for certain differential equations. Kasahara Shouro), Proc. Japan Acad., 1953, **29**, № 10, 544—547 (англ.)

Рассматриваются дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(a(x)\frac{dx}{dt}\right)+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=e(t), \qquad (1)$$

$$a(x)\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=e(t), \qquad (2)$$

где $e(t)$ — периодическая функция с периодом ω,

$$\int_0^\omega e(t)\,dt=0, \quad |e(t)|\leqslant e;$$

$f(x)$ непрерывна, функции $a'(x)$, $g(x)$, $e(t)$ обладают непрерывными производными.

Доказывается существование периодического решения. Для уравнения (1) это делается в предположениях, что $a(x)>0$ для всех x; $\int_0^x f(x)\,dx\to$ $\to\pm\infty$ при $x\to\pm\infty$ (соответственно); существует такое $x_0>0$, что $xg(x)\geqslant 0$ при $|x|>x_0$; эти условия при $a\equiv 1$, $x_0=9$ совпадают с условиями, данными ранее (Mizohata, Jamaguti, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto., 1952, **A27**, 109—113). Метод доказательства состоит в построении топографической системы кривых со ссылкой на теорему о неподвижной точке.

Для уравнения (2) условия более сложные; при доказательстве теоремы существования допущена ошибка из-за неудачного подбора кривых семейства: автор утверждает, что при больших y и $|x|<\xi$ будет выполняться неравенство

$$\frac{d\Gamma_1}{dt}=-\frac{a'(x)}{a^2(x)}F(x)y^2+$$
$$+\left[\frac{a'(x)}{a^3(x)}F^2(x)-\frac{g(x)}{a(x)}+\frac{e(t)}{a(t)}\right]y\leqslant 0$$

(выражение приводится с учетом опечатки). Но из условий теоремы видно, что $a(x)>0$, а функции $a'(x)$, $F(x)$ меняют знак в рассматриваемой области. В работе много опечаток. *В. И. Бурдина*

2669. О превращении особых точек и предельных циклов вариационных уравнений Ван-дер-Поля. Гиллис (On the transformations of singularities and limit cycles of the variational equations of van der Pol. Gillies A. W.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, **7**, № 2, 152—167 (англ.)

Рассматривается вопрос об изменениях особых точек и предельных циклов при изменениях параметров x и F в уравнениях вида

$$\dot b=b(1-b^2)-F\cos\varphi, \quad b\dot\varphi=-bx+F\sin\varphi. \qquad (1)$$

Уравнения (1) получены методом усреднения из уравнения Ван-дер-Поля с гармонической возмущающей силой; b и φ — соответственно медленно меняющиеся амплитуда и фаза вынужденных колебаний; x — расстройка, F — амплитуда возмущающей силы. Особые точки системы (1) соответствуют гармоническим колебаниям уравнения Ван-дер-Поля, а предельные циклы — почти периодическим колебаниям.

Для случая $F<8/27$ для больших и малых x показана ошибочность последовательности превращений предельных циклов и особых точек, данной в работе Картрайт (Cartwright M. L., J. Inst. Electr. Engr., 1948, 95, 88—96), и дается другое решение. Используется метод построения изоклин вблизи особой точки, а также рассматриваются особенности уравнений (1) в плоскости параметров (x, F). Аналогичный вопрос рассматривается, например, в книге А. А. Андронова и С. Е. Хайкина «Теория колебаний», 1937, гл. VI. *С. Н. Шиманов*

2670. Об устойчивости решений некоторых систем дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях. Дыхман Е. И., Тр. Казахск. с.-х. ин-та, 1953, **4**, № 1, 157—170

Излагаются основные понятия теории устойчивости в смысле Ляпунова. Приводятся формулировки теорем второго метода А. М. Ляпунова исследования устойчивости движения. Доказываются некоторые признаки устойчивости при постоянно действующих возмущениях, однако эти признаки являются следствием известных теорем об устойчивости при постоянно действующих возмущениях (см., например, Горшин С. И., Изв. АН КазССР, 1948, № 2, 46—73; Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1950). Доказывается также, что при малых возмущениях нулевое решение некоторой системы уравнений сохраняет неустойчивость, если для нее существует функция Ляпунова v, удовлетворяющая условиям теоремы III А. М. Ляпунова (Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., Гостехиздат, 1950, 92 стр.). При этом не говорится, как понимать термин «неустойчивость при постоянно действующих возмущениях», что необходимо, так как утверждение о сохранении неустойчивости в смысле Ляпунова при сколь угодно малых (и сколь угодно быстро убывающих к началу координат) возмущениях неверно и из приведенного доказательства не следует. Автор доказывает лишь, что для наперед заданной траектории $f(p, t)$, которая покидает ε-окрестность при возрастании времени, можно указать столь малые добавки к правым частям уравнений системы, чтобы выходящая из той же точки траектория новой системы также покидала ε-окрестность невозмущенного движения. Последний факт есть следствие интегральной непрерывности и его доказательство не нуждается в предположении о существовании функции Ляпунова.

В статье много опечаток и неточных формулировок. *Н. Н. Красовский*

2671. Об асимптотическом поведении решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Шмидт (Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires. Szmydt Zofia), Ann. Soc. polon. math., 1953, **24**, № 2, 17—34 (франц.)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(t)\,y_i+\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(t)\,y_j, \qquad (1)$$

где $f_i(t)$, $g_{ij}(t)$ — непрерывные комплексные функции (в частности, они могут быть действительными) действительной переменной t, $T\leqslant t<\infty$.

Показано, что если $n=p+q+r$, $0<q<n$,

$$\mathrm{Re}(f_1)\geqslant\cdots\geqslant\mathrm{Re}(f_p)>\mathrm{Re}(f_{p+1})\cdots$$
$$\cdots\geqslant\mathrm{Re}(f_{p+q+1})\geqslant\cdots\geqslant\mathrm{Re}(f_n),$$
$$\int_T^\infty\mathrm{Re}\,[f_p(t)-f_{p+1}(t)]\,dt=\infty,$$

$$\int_T^\infty \operatorname{Re}[f_{p+q} - f_{p+q+1}]\,dt = \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_{ij}}{\operatorname{Re}(f_p - f_{p+1})} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{g_{ij}}{\operatorname{Re}(f_{p+q} - f_{p+q+1})} = 0,$$

то существует система $q + r$ ленейно независимых решений системы (1), причем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|y_1|^2 + \cdots + |y_p|^2 + |y_{p+q+1}|^2 + \cdots + |y_{p+q+r}|^2}{|y_{p+1}|^2 + \cdots + |y_{p+q}|^2} = 0.$$

Это — обобщение результата Перрона (Perron, J. Math., 1953, **142**, 254—270).

Далее рассматривается система

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t)\, y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где g_{ij} непрерывные (вообще комплексные) функции действительной переменной t, $T \leqslant t < \infty$. Кроме того, 1) $\lim g_{ij}(t) = c_{ij}$, причем $c_{ij} = 0$ для $k+1 \leqslant i \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant k$; 2) действительные части характеристических корней матрицы $\{c_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, k$, больше действительных частей характеристических корней матрицы $\{c_{ij}\}$, $i, j = k+1, \ldots, n$.

Показано, что тогда существует система n линейно независимых решений системы (2) и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|y_{k+1}|^2 + \cdots + |y_n|^2}{|y_1|^2 + \cdots + |y_k|^2} = 0.$$

Этот результат также является обобщением результата Перрона (J. Math., 1953, **143**, 25—49).

Доказательство проводится топологическим методом Важевского (Wazewski T., Ann. Soc. polon. Math., 1947, **20**, 279—313), опирающимся на понятие ретракции, введенное К. Борсуком. *Z. Butlewski*

2672. Линейные дифференциальные уравнения с вполне монотонными решениями. Хартман, Винтнер (Linear differential equations with completely monotone solutions. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 199—206 (англ.)

Пусть коэффициенты дифференциального уравнения

$$f_0(x)\, y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f_k(x)\, y^{(n-k)} = 0, \quad n \geqslant 2, \quad (1)$$

при $x > 0$ удовлетворяют условиям: $-f_0'', -f_1', f_2, \ldots, f_n$ вполне монотонны и $f_0 > 0$. Тогда существует вполне монотонное решение $y(x) \not\equiv 0$, т. е. у функции $y(x)$ существуют все производные и

$$(-1)^k y^{(k)}(x) \geqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad x > 0. \qquad (2)$$

Так как всякая вполне монотонная функция представима в виде

$$y(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d\mu(t), \quad 0 < x < \infty, \qquad (3)$$

где $\mu(t)$ — неубывающая функция (см. например, Бернштейн С. Н., Абсолютно монотонные функции, Собр. соч. т. 1, 370—416), то теорема авторов утверждает существование решения уравнения (1), представимого в виде (3). При доказательстве используются некоторые результаты авторов (РЖМат, 1955, 1204). Выводятся условия, обеспечивающие выполнение неравенств (2) для $k = 0, 1, \ldots, m$, $0 \leqslant m \leqslant n$. *В. А. Якубович*

2673. Асимптотическое поведение интегралов системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Лоясевич (Sur l'allure asymptotique des intégrales du système d'équations différentielles au voisinage de point singulier. Łojasiewicz S.), Ann. polon. math., 1954, **I**, № 1, 34—72 (франц.)

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_j a_{ij} x_j + \varepsilon_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

Функции $\varepsilon_i(x_1, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные в окрестности начала координат, причем $\varepsilon_i(0, \ldots, 0) = 0$. Ставится классический вопрос об условиях совпадения асимптотического поведения решений (1) с асимптотическим поведением решений системы

$$\dot{y}_i = \sum a_{ij} y_j. \qquad (2)$$

Пусть дано две системы:

$$\dot{X} = F(t, X) \qquad (3)$$

в области B и

$$\dot{Y} = G(\tau, Y) \qquad (4)$$

в области D. Если существует взаимно однозначное дифференцируемое преобразование $t = h(\tau)$, $X = \Phi(\tau, Y)$ областей B и D, при котором интегралы системы (3) переходят в интегралы системы (4), то, следуя Важевскому, говорят, что существует, регулярный гомеоморфизм, переводящий систему (3) в систему (4) и обратно. Далее вводится определение (Важевский). Интеграл I_1 системы (3) асимптотически совпадает с интегралом I_2 системы (4), если: 1) I_1 и I_2 не могут быть продолжены вправо, т. е. для $t > 0$; 2) каждой точке (t_1, X_1), расположенной на I_1, и каждому $\varepsilon > 0$ на I_2 соответствует такая точка (t_2, X_2) и такое число $\delta > 0$, что

$$\operatorname{Em}_{II}(t_2, K(X_2, \delta)) \subset \operatorname{Em}_I(t_1, K(X_1, \varepsilon));$$

3) каждой точке (t_1, X_2), расположенной на I_2, и каждому $\eta > 0$ на I_1 соответствует точка (t_1, X_1) и $\mu > 0$ такие, что

$$\operatorname{Em}_I(t_1, K(X_1, \mu) \subset \operatorname{Em}_{II}(t_2, K(X_2, \eta)).$$

Здесь $K(X_i, \gamma)$ — сфера радиуса γ с центром в точке X_i, а $\operatorname{Em}(t_0, Z)$ — множество точек, лежащих на интегралах, выходящих из точек множества Z при $t \geqslant t_0$. После весьма сложных предварительных рассмотрений устанавливается теорема 1: Пусть дана система

$$\dot{x} = Ax + E(x), \qquad (5)$$

и выполнены условия:

1) $E(0) = 0$; $\left[\frac{\partial E}{\partial X}(0)\right] \equiv 0$;

2) элементы матрицы

$$[g_{ij}(t, Y)] = e^{-At} \cdot \left[\frac{\partial E}{\partial X}\right]_{X = e^{At}Y} \cdot e^{At}$$

удовлетворяют условиям:

$$g_{ij}(t, Y) = O\left(\frac{1}{t}\,\rho\left(\frac{1}{t}\right)\right) \text{ для } t \to \infty, \quad Y \to 0,$$

где $\rho(Z)$ — непрерывная положительная функция, $\int_0^z \rho(z)\,dz/\rho < \infty$, $z > 0$. Тогда система

$$\dot{X} = AX + EX \tag{6}$$

регулярно гомеоморфна линейной системе $\dot{Y} = AY$, причем интегралы, соответствующие при этом гомеоморфизме, будут асимптотически совпадающими. Дополнительно устанавливается, что гомеоморфизм $\tau(t, X) = \{t, \Phi(X)\}$ таков, что $\Phi(X)$ не зависит от t (т. е. соответствующие решения будут иметь одинаковые начальные условия и $\Phi(0) = 0$, $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}(0)\right] = I$.

При помощи этой теоремы устанавливается, что достаточным условием регулярного гомеоморфизма является условие

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_k}(X) = O\left(X^{\sigma_* - 1}\left|\frac{1}{\ln x}\right|^{a^* + \frac{\sigma^*}{\sigma_*}(a_* - 1)}\rho\left(\frac{1}{|\ln x|}\right)\right)$$

где $\rho(z)$ — непрерывно возрастающая функция, $\int_0^z \rho(z)\,dz/z < \infty$ при $z > 0$, $\lambda_i = -\sigma_i + i\tau_i$ — корни характеристического уравнения матрицы A, a_ν — наибольшая степень элементарного делителя, соответствующего корню λ_ν; $\sigma_* = \min \sigma_\nu$, $\sigma^* = \max \sigma_\nu$, $a_* = \min_{\sigma_\nu = \sigma_*} a_\nu$, $a^* = \max_{\sigma_\nu = \sigma^*} a_\nu$.

Наконец, исследуется система

$$\dot{x}_1 = -sx_1 + x_2 + \varepsilon_1(X),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{x}_n = -sx_n + \varepsilon_n(X),$$

где $\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_k}(X) = O\left(\left|\frac{1}{\ln|X|}\right|^{2n-1}\rho\left(\frac{1}{|\ln X|}\right)\right)$ при $X \to 0$.

Автор не упоминает непосредственно относящихся к теме работ Петровского (Матем. сб., 1934, **41**, № 1, 107—156), Якубовича (Матем. сб., 1952, **28**, № 1, 217—240, в этой работе, в частности, впервые были высказаны условия, при которых возможен гомеоморфизм между системами (5) и (6) в окрестности особой точки и в целом), Гробмана (Матем. сб., 1952, **30**, № 1, 121—161; Докл. АН СССР, 1952, **86**, № 1, 19—22). В последних работах установлены явные формулы, дающие указанный выше гомеоморфизм, из которых легко вывести, что этот гомеоморфизм регулярный. Условия для такого гомеоморфизма в обозначениях автора: $\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_k}(X) = O\left(\frac{1}{|\ln|X||}\right)^{2m+1+\varepsilon}$, где $m + 1 = \max a_\nu$; причем соответствующие кривые будут удовлетворять условию $|x - y| = \rho(e^{\omega_k t})$, где ω_k — характеристический показатель решения системы $\frac{dy}{dx} = A$. Во всех указанных работах рассматривается и гомеоморфизм в целом.

В. В. Немыцкий

2674 К. Элементарные дифференциальные уравнения. Келс (Elementary differential equations. Kells Lyman Morse, 266 p., McGraw, 1954, 4 doll.), Cumul. Book. Index, 1954, **57**, № 2, 88 (библ.)

2675 К. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, изложенная на основе теории функций. Бибербах (Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt. Bieberbach Ludwig von), Berlin, 338 S., 1953, 39.60 DM (нем.)

Краткий курс аналитической теории дифференциальных уравнений. Автор, наряду с такими результатами (уже давно ставшими в этой области классическими), как исследования Пенлеве по уравнениям 1-го порядка, теория линейных уравнений, уравнения класса Фукса, гипергеометрические уравнения, уравнения Бесселя и т. п., рассматривает ряд более новых исследований, например, исследования Гельдера, Гурвица, Островского, Пойа в функциях, не удовлетворяющих никакому алгебраическому дифференциальному уравнению (такова, например, функция $\Gamma(x)$), некоторые результаты по теории интегралов уравнений 2-го порядка класса Фукса с четырьмя особыми точками и др. В ряде мест автор, не приводя подробного изложения вопроса, ограничивается формулировкой полученных различными исследователями результатов. Примером могут служить замечания об исследованиях по теории интегралов с конечным числом значений и о росте решений дифференциальных уравнений Мальквиста, Пойа, Валирона.

Приводим перечисление параграфов книги. § 1. Основные теоремы существования; § 2. Особые точки обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка; § 2. Поведение решений уравнения $\frac{dw}{dz} = \frac{aw + bz}{cw + dz}$ при постоянных a, b, c и d около особой точки; § 4. Существенные особые точки второго рода; § 5. Дифференциальные уравнения 1-го порядка «в целом»; § 6. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка «в малом»; § 7. Дифференциальные уравнения класса Фукса; § 8. Гипергеометрические дифференциальные уравнения; § 9. Бесселево дифференциальное уравнение; § 10. Дифференциальные уравнения класса Фукса с четырьмя особыми точками; § 11. Дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами; § 12. Некоторые нелинейные дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Из этого перечисления видно, что в книге не затронута теория систем линейных дифференциальных уравнений, развитая Лаппо-Данилевским.

Обилие приводимого материала, некоторая пестрота в его выборе и сжатость изложения требуют от читателя достаточной подготовки, прежде всего в общей теории функций комплексного переменного. Книга может служить введением в изучение современной аналитической теории дифференциальных уравнений.

В. В. Голубев

2676 К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. II. Сансоне Дж. (Перев. с итал.), 415 стр., М., Изд-во иностр., лит-ры, 1954, 16 р. 55 к.

Второй том двухтомного издания; перевод тома I вышел ранее (РЖМат, 1954, 4419 К). Глава VII «Асомптотическое поведение решений дифференци-

альных уравнений» начинается с формулировки простейших положений об устойчивости и неустойчивости решений систем дифференциальных уравнений. Далее приводятся некоторые результаты, относящиеся к асимптотическим разложениям решений линейных однородных уравнений, а также теоремы Перрона об асимптотическом поведении решений (и производных от них) линейных уравнений любого порядка. Значительное внимание уделено уравнению $y'' + A(x)y = 0$; излагается ряд результатов различных авторов. Здесь рассматривается как случай положительного, так и отрицательного $A(x)$, причем разобраны также случаи $A(x) \to \infty$ и $A(x) \nrightarrow 0$ (при $x \to \infty$). Полученные асимптотические разложения решений применяются к выводу асимптотических формул для функций Бесселя. Тут же подробно изучается характер колебания решений в различных случаях, а также приводятся некоторые достаточные условия асимптотической устойчивости решений (теоремы Армеллини — Тонелли — Сансоне). В заключение главы VII приводятся некоторые результаты об асимптотическом представлении решений уравнения $y'' - (\lambda^2\chi_0(x) + \lambda\chi_1(x) + \chi_2(x))y = 0$ при больших значениях параметра λ.

В главе VIII «Теоремы существования и единственности в целом для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений исследуются решения уравнения $y' = f(x, y)$ в случае непрерывной правой части. Доказываются теоремы о продолжении решения и о свойствах верхнего и нижнего решений. Далее следуют теоремы о сравнении решений и ряд теорем различных авторов о единственности решения (отметим недосмотр: на стр. 89, посреди строчки 3 сверху, надо добавить: при $x \geqslant \alpha$). Некоторые из этих результатов переносятся на системы уравнений, разрешенных относительно старших производных. Далее рассматриваются задачи об отыскании интегральных кривых уравнений $y' = \lambda f(x, y)$ и $y'' = f(x, y)$, проходящих через две заданные точки. Эта же задача подробно исследуется для уравнения $y'' = f(x, y, y')$. В заключение приводятся известные результаты Каратеодори, связанные с обобщением понятия решения обыкновенного дифференциального уравнения. Глава VIII содержит отдельный подробный список литературы.

Глава IX «Особые точки. Особые решения» сравнительно бедна. Особые точки рассматриваются почти только для простейшего случая уравнения с дробно-линейной правой частью. Более интересно рассмотрение особых решений для уравнения 1-го порядка. Здесь сначала исследуется p-дискриминантная кривая, причем даются необходимые и достаточные условия для существования особой интегральной кривой. Затем исследуется c-дискриминантная кривая для различных форм общего решения.

В главе X «Операционные методы. Преобразование Лапласа» излагаются основные алгебраические свойства линейных дифференциальных операторов (т. е. символическое исчисление). Обратные операторы исследуются для операторов с постоянными коэффициентами; в частности, приводится результат применения такого обратного оператора к любой голоморфной функции. Понятие общего наибольшего делителя двух линейных дифференциальных операторов применяется к нахождению общих решений двух линейных дифференциальных уравнений. Символическое исчисление применяется к решению системы общего вида линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для систем с переменными коэффициентами излагается способ приведения их к диагональному виду, а также способ представления решений при помощи определенных интегралов (последний способ иллюстрируется на примере уравнения Лапласа). Далее автор переходит к подробному изложению свойств преобразования Лапласа (одностороннего) и к приложению этого преобразования к решению дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются постоянные или многочлены, а также систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Бегло излагается операционное исчисление Хевисайда. В заключение кратко говорится о методе Бромвича интегралов в комплексной области и о функциональном операторном исчислении Джорджи; показано применение этого исчисления к расчету электрических цепей.

В главе XI «Численное, графическое и механическое решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» после краткого изложения метода последовательных приближений автор переходит к простейшему и видоизмененному методам Эйлера и к методу Рунге — Кутта. Рассматриваются методы, основанные на применении аппроксимационных многочленов, в частности, методы Адамса, Нистрема и Штермера (отметим опечатку: на стр. 242, строчка 9 снизу, должно быть $(-1)^{n-i}$ вместо $(-1)^i$). Приводится простой метод оценки сверху наименьшего собственного значения задачи Штурма—Лиувилля, после чего автор излагает метод Ритца и метод Н. М. Крылова—Пиконе—Мак-Ивена наименьшей потенциальной энергии для приближенного решения линейной краевой задачи для линейного дифференциального уравнения общего вида. Далее автор переходит к графическим методам: методам изоклин, огибающих, радиусов кривизны и т. д. В заключение приводятся схемы интеграфов Паскаля и Вьеториса.

Глава XII «О некоторых встречающихся в приложениях дифференциальных уравнениях» представляет значительный интерес. В ней содержится детальное исследование ряда важнейших уравнений специального вида. Сначала исследуются решения системы уравнений движения тяжелой точки в сопротивляющейся среде при общем законе сопротивления, наиболее подробно, если сопротивление зависит только от скорости движения точки (отметим недосмотр: все рассуждения на стр. 288—292, связанные с числом λ, излишни, так как в силу теоремы единственности, примененной к уравнению (6), такого числа не может быть). Далее подробно исследуются решения уравнения затухающих колебаний

$$A\frac{d^2y}{dt^2} + \left[B + F\left(\frac{dy}{dt}\right)\right]\frac{dy}{dt} + Cy = 0$$

в предположении, что $A > 0$, $B \geqslant 0$, $C > 0$, а функция $F(v)$ удовлетворяет условию Липшица в любом конечном отрезке, четна и положительна всюду, кроме $F(0) = 0$. Затем автор переходит к изучению уравнения релаксации

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega f(y)\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$$

($\omega = \text{const} > 0$, функция $f(y)$ непрерывна). Здесь большое внимание уделяется периодическим реше-

ниям. После этого рассматривается уравнение вынужденных колебаний маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 \sin x = \beta \sin t \qquad (\alpha^2 < 1).$$

Затем детально исследуются решения уравнения Фаулера $\frac{1}{\xi^\lambda}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\vartheta}{d\xi}\right) + \vartheta^n = 0$, частным случаем которого является уравнение Эмдена равновесия сферы из политропного газа; для $1 < n \leqslant \lambda + 1$ устанавливается асимптотическое поведение решений уравнения Фаулера. Далее излагаются теоремы Асколи об асимптосическом поведении решений уравнения Польвани движения электрона в магнетроне Хэлла; это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\lambda^2 t}{2r} - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r^3} \quad (\lambda > 0 \text{ — параметр}).$$

Излагаются некоторые результаты, касающиеся решения краевой задачи $y'' = \varphi(x, y)\,\psi(x)$, $y(0) = y_0$, $y(+\infty) = 0$. Наконец, рассматриваются частные случаи уравнения Шредингера $\frac{d^2u}{dx^2} + (\lambda - x^2)u = 0$ (λ находится из условия $u(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$) и $\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\pm\frac{1}{4} + \frac{A}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right] y = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots)$, $y(0) = 0$; A находится из условия ограниченности $y(x)$ при $0 \leqslant x < \infty$.

По многим вопросам имеются исторические справки и обзор современного состояния проблемы.

А. Д. Мышкис.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

2677. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций. О л е й н и к О. А., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3, 451—454

В развитие идей, высказанных в книге И. Г. Петровского «Лекции об уравнениях с частными производными» (М., 1953, 139—142), впервые дается общее определение решения задачи Коши при разрывных начальных условиях для уравнения

$$\partial u / \partial t + \partial \varphi(t, x, u) / \partial x = 0 \qquad (1)$$

(в предположении достаточной гладкости функции φ). Пусть функция $u_0(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ имеет разрывы только 1-го рода, а область G в полуплоскости $t > 0$ ограничена снизу отрезком $[a, b]$ прямой $t = 0$, а с боков—проекциями на плоскость (t, x) характеристик (т. е. интегральных линий системы $dx/dt = \varphi_u'(t, x, u)$, $du/dt = -\varphi_x'(t, x, u)$), проходящих через точки $(0, a, u_0(a+0))$ и $(0, b, u_0(b-0))$. Предполагается, что функция φ_u' монотонно возрастает по u, а любые две точки из G можно единственным образом соединить проекциями указанных характеристик. Через M обозначается множество характеристик, проходящих через точки $(0, x, u_0(x))$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ и через точки $(0, x, \bar{u})$ $(a < x < b, u_0(x-0) < u_0(x+0), u_0(x-0) \leqslant \bar{u} \leqslant u_0(x+0))$. Функция $u(t, x)$ называется решением задачи Коши $u(0, x) = u_0(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ для уравнения (1) в области G, если: 1) для любой точки $(t_1, x_1) \in G$ непрерывности функции u характеристика, проходящая через точку $(t_1, x_1, u(t_1, x_1))$, принадлежит M и при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ проходит по графику решения, а ее проекция на плоскость (t, x) — по множеству точек непрерывности и 2) для любой точки (t_1, x_1) разрыва функции u найдутся по крайней мере две характеристики из M, проходящие при $t < t_1$ по графику решения, проекции которых на плоскость (t, x) проходят через точку (t_1, x_1), а при $t < t_1$ состоят только из точек непрерывности u; кроме того,

$$\int \varphi(t, x, u(t, x))\, dt - u(t, x)dx = 0,$$

где интеграл взят по замкнутому контуру, образованному прямой $t = 0$ и проекциями любых двух таких характеристик.

Доказано, что так определенное решение задачи Коши существует и единственно. Множество точек разрыва функции $u(t, x)$ оказывается расположенным не более чем счетном множестве графиков непрерывных функций t, имеющих правую производную, равную

$$\frac{\varphi(t, x, u(t, x-0)) - \varphi(t, x, u(t, x+0))}{u(t, x-0) - u(t, x+0)}.$$

При этом пределы $u(t, x-0)$ и $u(t, x+0)$ существуют в каждой точке разрыва решения u. Рассмотрен также вопрос о непрерывности зависимости решения от начального условия. Имеются указания, касающиеся задания начального условия на всей оси t и уравнения

$$f_1(t, x, u)\, \partial u/\partial t + f_2(t, x, u)\, \partial u/\partial x = f_3(t, x, u).$$

Приведены лишь схемы доказательств основных фактов.

А. Д. Мышкис

2678. Нелинейные краевые задачи для нелинейных параболических уравнений с двумя независимыми переменными — периодические решения. П р о д и (Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabili — soluzioni periodiche. P r o d i G i o v a n n i), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 1, 25—85 (итал.)

Рассматривается краевая задача

$$u_t = u_{xx} + F(x, t, u, u_x),$$
$$((x, t) \in R = \{0 < x < l, 0 < t < T\}).$$
$$u(x, 0) = \chi(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l),$$
$$u_x(0, t) = -\varphi_1(t, u(0, t)),$$
$$u_x(l, t) = \varphi_2(t, u(l, t)), \qquad (0 < t \leqslant T).$$

Пусть функция F определена и непрерывна при $(x, y) \in R$, $-\infty < u, u_x < \infty$, $|F| \leqslant K(|u|)(t^{-\alpha} + |u_x|^{2\alpha})$, где функция K не отрицательна и не убывает, а $0 < \alpha < 1$; кроме того, функция F удовлетворяет условию Гельдера вблизи каждой точки своего определения; функция χ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant T$, а функции $\varphi_i(t, u)$ $(i = 1, 2)$ непрерывны при $0 < t \leqslant T$, $-\infty < u < \infty$, и $|\varphi_i| \leqslant K(|u|)\, t^{-\beta}$, $0 \leqslant \beta < 1/2$; наконец, существуют функции $\bar{u}(x, t)$ и $\underline{u}(x, t)$, непрерывные на $\bar{R}$, имеющие на $\tilde{R} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 < t \leqslant T\}$ производные по x, которые удовлетворяют

условию Гельдера вблизи каждой точки R, причем $\sup(|\overline{u}_x|\sqrt{t})<\infty$ и $\sup(|\underline{u}_x|\sqrt{t})<\infty$, и имеющие на R производные по t и вторые производные по x, причем

$$\overline{u}_t > \overline{u}_{xx} + F(x,t,\overline{u},\overline{u}_x),\quad \underline{u}_t < \underline{u}_{xx} + F(x,t,\underline{u},\underline{u}_x),$$
$$-\overline{u}_x(0,t) > \varphi_1(t,\overline{u}(0,t)),$$
$$-\underline{u}_x(0,t) < \varphi_1(t,\underline{u}(0,t)),$$
$$\overline{u}_x(l,t) > \varphi_2(t,\overline{u}(l,t)),$$
$$\underline{u}_x(l,t) < \varphi_2(t,\underline{u}(l,t)),$$
$$\overline{u}(x,0) > \chi(x) > \underline{u}(x,0).$$

Тогда поставленная краевая задача имеет по крайней мере одно решение $u(x,t)$, непрерывное на $\overline{R}$, обладающее непрерывной производной u_x на $\widetilde{R}$, причем $\sup(|u_x|\sqrt{t})<\infty$, и обладающее в каждой точке R производными u_t и u_{xx} (удовлетворяющими заданному уравнению).

Доказательство состоит из ряда этапов. Сначала доказывается лемма о сравнении решений, основанная на аналогичной лемме Вестфаля (Westphal H., Math. Z., 1949, 51, 690—695). Затем автор переходит к рассмотрению линейного случая, когда

$$F \equiv f(x,t), \quad \varphi_i \equiv \psi_i(t) \quad (i=1,2).$$

Здесь решение получается в явном виде

$$u(x,t) = \int_0^l \Gamma(x,\xi;t)\,\chi(\xi)\,d\xi + \int_0^t \Gamma(x,0;t-\eta)\,\psi_1(\eta)\,d\eta +$$
$$+ \int_0^t \Gamma(x,l;t-\eta)\psi_2(\eta)d\eta + \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x,\xi,t-\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi, \quad (1)$$

где $\Gamma(x,\xi;t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\dfrac{(2nl+x-\xi)^2}{4t}\right) + \right.$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(2nl+x+\xi)^2}{4t}\right)\right\},$$

(1) подробно обосновывается; при этом использованы результаты Леви (Levi E. E., Ann. mat., 1908, 14, 187—264). Отметим, что попутно доказана теорема о единственности решения в классе функций u, непрерывных в $\overline{R}$ и имеющих непрерывную производную u_x на $\widetilde{R}$ и производные u_t и u_{xx} в R, если $F \equiv f(x,t)\,u$, $\varphi_i \equiv \psi_i(t)\,u$ $(i=1,2)$ и выполнены приведенные выше условия, кроме существования функций $\overline{u}$ и $\underline{u}$, которое не предполагается. На основании формулы (1) исходная краевая задача преобразуется в эквивалентное интегро-дифференциальное уравнение. Для исследования этого уравнения вводится пространство функций u, непрерывных на $\overline{R}$, имеющих на $\widetilde{R}$ непрерывную производную u_x и обладающих для некоторого фиксированного $\gamma>0$ $(\gamma<1-\alpha,\ \gamma<1/2-\beta)$ конечной нормой

$$\max_{\overline{R}}|u| + \sup_{\overline{R}}(|u_x|\sqrt{t}) + \sup_{(x,t'),(x,t'')\in\overline{R}} \frac{|u(x,t'')-u(x,t')|}{|t''-t'|^{\gamma}}$$

Задача сводится к доказательству существования неподвижной точки у оператора, определенного в данном банаховом пространстве правой частью упомянутого интегро-дифференциального уравнения. Это осуществляется при помощи известного топологического метода Лерея-Шаудера. Вводится дополнительный параметр, с изменением которого данный оператор непрерывно преобразуется в линейный, что дает возможность применить результаты, полученные для линейного случая.

Рассматриваются различные специальные случаи выполнения условий основной теоремы о существовании решения. Отметим, в частности, что за счет достаточного уменьшения T можно полностью отказаться от требований, связанных с функциями $\overline{u}$ и $\underline{u}$ (оставив прочие условия без изменения).

Далее развивается аналогичная теория для доказательства существования (в соответствующих предположениях) по крайней мере одного периодического решения $u(x,t)$ $(0\leqslant x\leqslant l, -\infty<t<\infty; u(x,t+T)\equiv u(x,t), T>0)$ краевой задачи

$$u_t = u_{xx} + f(x,t,u,u_x),$$
$$u_x(0,t) = -\varphi_1(t,u(0,t)),\ u_x(l,t) = \varphi_2(t,u(l,t))$$

$(0\leqslant x\leqslant l, -\infty<t<\infty; f(x,t+T,u,u_x)\equiv f(x,t,u,u_x), \varphi_i(t+T,u)\equiv\varphi_i(t,u))$. Здесь получается пара интегро-дифференциальных уравнений с двумя искомыми функциями; соответственно усложняется и положенное в основу метода Лерея—Шаудера банахово пространство. При этом приходится применять результаты Жеврея (Gevrey M., J. math. pures et appl., 1913, 78, 351).

Замеченные опечатки исправлены в тексте реферата; отметим, кроме того, следующие: на стр. 31, строка 9 снизу, должно быть $\overline{R}$ вместо R; на стр. 41, строки 5—6 снизу, должно быть $\varphi_1(t,u(0,t))$ вместо $\varphi_1(u(0,t))$ и $(1-\lambda)\,\varphi_2^*$ вместо $(1-\lambda)\,\varphi_2$.

А. Д. Мышкис

2679. Изолированные особенности решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Финн (Isolated singularities of solutions of nonlinear partial differential equations. Finn Robert), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 3, 385—404 (англ.)

Рассматриваются уравнения вида

$$\theta_x + \Lambda_y = 0 \quad (1)$$

где $\theta = \theta(x,y,\varphi_x,\varphi_y,\varphi)$ и $\Lambda = \Lambda(x,y,\varphi_x,\varphi_y,\varphi)$. Функция $\varphi_0(x,y)$ называется допустимым решением уравнения (1) в точке (x_0,y_0), если существует окрестность N точки (x_0,y_0) такая, что внутри N выполняются условия:

1) φ_0 дважды непрерывно дифференцируема;

2) после подстановки $\varphi=\varphi_0$ функции Λ и θ непрерывно дифференцируемы по x и y;

3) $\theta\varphi_{0x} + \Lambda\varphi_{0y} \geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_{0x}\equiv 0$ и $\varphi_{0y}\equiv 0$.

Исследуется поведение однозначных допустимых решений в окрестности изолированной особой точки; доказывается основная теорема 1 (обобщенный принцип максимума и минимума):

Пусть φ — однозначное допустимое решение (1) в $0<x^2+y^2<R^2$. Обозначим $H_r = \sup\varphi$ и $L_r = \inf\varphi$

для $0 < x^2 + y^2 < r^2 < R^2$. Пусть $H = \lim_{r\to 0} H_r$, $L = \lim_{r\to 0} L_r$ и $(\theta^2 + \Lambda^2)^{1/2} = o(1/r)$.

Тогда в каждой окрестности начала существуют точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такие, что $\varphi(x_1, y_1) \geqslant H$ и $\varphi(x_2, y_2) \leqslant L$.

В частности, φ ограничена в $0 < x^2 + y^2 < R^2$.

Доказательство элементарно — оно опирается на формулу Грина и на одну специальную лемму. Из этой теоремы, в частности, следует, что уравнение, удовлетворяющее условию $(\theta^2 + \Lambda^2)^{1/2} = o(1/r)$ (например, уравнение минимальных поверхностей), для всех решений в точке (x_0, y_0) не допускает фундаментальных решений, аналогичных решению $\ln \frac{1}{r}$ для уравнения Лапласа. Указывается, что при условии $(\Sigma_i \theta_i^2)^{1/2} = o(r^{1-n})$ теорема (1) верна для уравнений вида $\Sigma \theta_{lx_l} = 0$ с любым числом независимых переменных.

Далее рассматривается вопрос об устранимых особенностях решений уравнений вида (1). Теорема 2: Пусть $\theta = f(\varphi_x, \varphi_y)$ и $\Lambda = g(\varphi_x, \varphi_y)$, уравнение (1) эллиптического типа, φ — его однозначное решение в окрестности точки X, с изолированной особенностью в этой точке. Тогда, если $(\theta^2 + \Lambda^2)^{1/2} = o(1/r)$ в точке X, особенность в X устранима.

В качестве следствия отсюда получается результат Берса об устранимости изолированных особенностей решений уравнения минимальных поверхностей. Из метода доказательства следует, что проблема устранимости особенностей для уравнения рассмотренного типа сводится к проблеме разрешимости для этих уравнений первой краевой задачи для достаточно малых областей. Это замечание переносится на случай n независимых переменных.

Теорема 3: Пусть $\theta = f(\varphi_x, \varphi_y)$ и $\Lambda = g(\varphi_x, \varphi_y)$ такие, что область значений (φ_x, φ_y), для которых (1) эллиптично, выпукла, φ — решение (1) с изолированной особенностью в точке X, однозначное в окрестности N точки X, и такое, что уравнение $\theta_x + \Lambda_y = 0$ эллиптично в окрестности N для этого решения. Если $(\theta^2 + \Lambda^2)^{1/2} = o\left(\frac{1}{r}\right)$, то заключения теоремы 1 верны для φ_α (φ_α — производная в направлении α). Из этой теоремы и из некоторых результатов Шифмана автор получает теорему об устранимости изолированных особенностей для решений уравнений Эйлера—Лагранжа вариационных задач вида $\delta \iint F(p, q)\, dx\, dy = 0$ $(p = \varphi_x,\ q = \varphi_y)$.

Рассматриваются многозначные решения уравнения (1). Указываются применения полученных результатов к уравнениям газовой динамики. В заключение автор приводит без доказательства усиленную формулировку теоремы 3: Пусть уравнение (1) и его решение φ удовлетворяют условиям теоремы 3. Тогда, если φ имеет изолированную особенность в точке X и удовлетворяет условию $(\theta^2 + \Lambda^2)^{1/2} = o\left(\frac{1}{r}\right)$ в этой точке, то эта особенность устранима. *Б. В. Болгарский*

2680. О системах линейных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического и параболического типов. П и н и (Sui sistemi di equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine dei tipi ellittico e parabolico. P i n i B r u n o), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 2, 265—280 (итал.)

В первой части рассматривается самосопряженная система дифференциальных уравнений вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) - N(x, y)\, u = h,$$

где A, B, C, N — симметрические матрицы порядка n, $u(x, y)$ и $h(x, y)$ — вектор-функции. Предполагается, что

матрицы $\left\|\begin{matrix} A & B \\ B & C \end{matrix}\right\|$ и N — положительно определенные. (1)

На границе FD области D задается граничное условие $u|_{FD} = u(s)$, причем удовлетворение этому условию понимается в среднем.

Для указанных систем доказана теорема о единственности решения соответствующей краевой задачи в классе функций, имеющих внутри D непрерывные производные до второго порядка (предполагается, что $u(s) \in L_2$). Отметим, что при этом не предполагается суммируемости в квадрате $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ в D. Для систем, у которых $A = E, B = 0$, $C = E$, $h(x, y) \equiv 0$, Устанавливается справедливость принципа максимума:

$$|u(x, y)| \leqslant \max_{FD} |u(s)|, \quad (x, y) \in D.$$

Во второй части рассматривается система вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

A, B, C — постоянные. Доказывается, что необходимым условием единственности решения первой краевой задачи для таких систем в областях, ограниченных параболоидами, является

$$\det \| 2(\alpha_{11}A + 2\alpha_{12}B + \alpha_{22}C) + \beta E \| \neq 0$$

для всех $\alpha_{11} + \alpha_{22} > 0$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 \geqslant 0$, $\beta > 0$.

Для параболических систем $Lu - \frac{\partial u}{\partial z} = f$, для которых выполнены условия (1), доказывается единственность решения первой краевой задачи в классе функций, имеющих внутри области D непрерывные производные до второго порядка и принимающих на нижнем основании D и на боковой поверхности граничные условия в среднем. *М. И. Вишик*

2681. Замечания о решениях систем уравнений в частных производных эллиптического типа. П и н и (Osservazioni sulle soluzioni dei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari di tipo ellittico. P i n i B r u n o), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 2, 366—379 (итал.)

Работа посвящена самосопряженным системам вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) - Nu = 0, \quad (1)$$

где A, B, C и N — симметрические матрицы порядка n, достаточно гладкие относительно (x, y). Предполагается, что матрицы $\left\|\begin{matrix} A & B \\ B & C \end{matrix}\right\|$ и N положительные. Вариационными методами доказано существование решения первой краевой задачи ($u|_\Gamma = \varphi(s)$) для уравнения (1). Удовлетворение граничным условиям понимается в среднем. *М. И. Вишик*

2682. Граничные задачи и условия на бесконечности. Лион (Problèmes aux limites et conditions à l'infini. Lions Jacques-Louis), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 25, 1617—1620 (франц.)

В неограниченной области Ω рассматривается первая краевая задача для уравнения вида

$$Lu \equiv (D^1 + iD^2 + M_1 + iM_2)\,u = h,$$

где D^1 — эллиптический дифференциальный оператор, D^2 — оператор порядка, не превосходящего порядок D^1 (L — сильно эллиптический оператор), M_1, M_2 — функции. При выполнении определенных условий утверждается существование обобщенного решения этой задачи. Кроме того, приводится теорема о существовании обобщенного решения смешанной задачи для параболических уравнений вида

$$(D^1 + iD^2 + R)\,u + \frac{\partial}{\partial t}(M_1 u) = T.$$

М. И. Вишик

2683. Новый приближенный метод интегрирования некоторых уравнений гиперболического типа. Станюкович К. П., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 979—982

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{d \ln A}{d\tau}\cdot\frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (1)$$

которое встречается в задаче об одномерном адиабатическом течении газа при некоторых частных предположениях. Выписываются в явном виде интегралы уравнения (1), содержащие произвольные функции в случае $A = A_0(\tau + \tau_0)^{2n}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$):

$$u(t, \tau) = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[F_1(t - \sqrt{z}) + F_2(t + \sqrt{z})\right];\ z = \tau^2$$

(при $n < 0$ операция $\dfrac{\partial^n}{\partial z^n}$ есть $-n$-кратная операция интегрирования). Указан также способ апроксимации семейства изэнтроп. Есть опечатки и неточные высказывания. *Р. А. Александрян*

2684. Элементарный метод выражения лапласиана Δ_c в криволинейных неортогональных координатах и некоторые следствия. Варт (An elementary method of expressing the laplacian Δ_c in terms of curvilinear non-orthogonal coordinates, with some corollaries. Vaart H. R., van der), Simon Stevin, 1954, **30**, № 1, 48—57 (англ.)

Вывод известного выражения для лапласиана в криволинейной неортогональной системе координат, использующий лишь аппарат дифференцирования и элементы теории определителей. Записав уравнение Лапласа в криволинейной системе координат, автор получает необходимые и достаточные условия существования решения этого уравнения, зависящего лишь от одной из координат, и некоторые другие простые следствия. *М. Н. Олевский*

2685. Об общем решении волнового уравнения. Ярдецкий (On the general solution of a wave equation. Jardetzky W. S.), Trans. N. Y. Acad. Sci., 1953, **15**, сер. 2, № 8, 197—301 (англ.)

Обзор общих решений уравнения

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Автор предлагает решение:

$$\varphi = \sum \int_{(L)} \cdots \int f_i(\psi_i;\ v_1, v_2, v_3, v_4, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t}) \times \times\, dv_1\, dv_2\, dv_3\, dv_4\, d\hat{x}\, d\hat{y}\, d\hat{z}\, d\hat{t},$$

где f_i — две произвольные функции аргументов

$$\psi_{1,2} = v_1(x - \hat{x}) + v_2(x - \hat{y}) \pm v_3(z - \hat{z}) + v_4(t - \hat{t}),$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{v_4^2}{\alpha^2} - v_1^2 - v_2^2}.$$

Не доказано, что из этого решения могут быть выведены все те, существование которых следует из теоремы Коши.

Библиография, 17 названий. *Г. Д. Малюжинец*

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

2686. О субгармонических решениях уравнения Льенара. Миноцци (Sulle soluzioni sottoarmoniche dell'equazione du Liénard. Minozzi Luisa), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 2, 196—198 (итал).

Рассматривается уравнение

$$\ddot{y} - \psi(y)\,\dot{y} + \omega_0^2 y = C\cos n\,\omega_0 t, \quad (1)$$

где $\psi(y)$ — полином степени $n - 1$, содержащий только четные степени y. Коэффициенты этого полинома подбираются таким образом, чтобы уравнение (1) допускало решение $y = B\sin\omega_0 t$, чем и доказывается возможность существования у такого рода уравнений субгармонических решений порядка n. *И. Г. Малкин*

2687. Дифференциальная структура нелокализируемых теорий. I. Жевуский (Differential structure of non-local theories. I. Rzewuski Jan), Acta phys. polon, 1954, **13**, № 2, 135—144 (англ.)

Нелокализируемая теория движения элементарных частиц характеризуется тем, что в уравнения, описывающие движение, входят, кроме дифференциальных членов, также интегральные. Для прос-

тейшего случая линейного осциллятора уравнение записывается в виде

$$\ddot{q}(t) + \varkappa^2 q(t) = \lambda \int_a^b \Phi(t)\, G(t - t')\, q(t')\, dt'.$$

В работе двумя способами производится сведение этого интегро-дифференциального уравнения к дифференциальному уравнению

$$a_2\ddot{q} + a_1\dot{q} + a_0 q = 0$$

с определенными коэффициентами a_0, a_1, a_2.

В формуле (2.1) имеется опечатка. Напечатано $t > 1$, $t < 1$, нужно $t > 0$, $t < 0$. *Ф. Д. Гахов*

2688. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. Баренблатт Г. И., Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 3, 261—274

Рассматривается турбулентное движение жидкости, содержащей взвешенные частицы. Методом осреднения уравнений гидромеханики построена система уравнений, являющаяся обобщением уравнений Рейнольдса на случай двухфазной смеси. Получено уравнение баланса энергии, учитывающее обратное воздействие взвешенных частиц на динамику потока. В этом отношении теория, развитая автором, имеет определенное преимущество перед существующими.

Для замыкания системы уравнений автор принимает некоторые дополнительные гипотезы, являющиеся обобщением на случай неоднородной среды опубликованных ранее соображений А. Н. Колмогорова (Изв. АН СССР, сер. физ., 1942, 6, № 1—2, 3—32), относящихся к турбулентному потоку однородной жидкости.

Получен безразмерный параметр, определяющий качественный характер движения жидкости, содержащей взвешенные частицы, и рассмотрены некоторые предельные случаи.

В статье отсутствуют конкретные примеры расчета; экспериментальные данные не используются. *А. М. Обухов*

2689. Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных при помощи бесконечно малых преобразований Баклунда. Лёвнер (Generation of solutions of systems of partial differential equations by composition of infinitesimal Baecklund transformations. Loewner Charles), J. Analyse Math., 1953, **2**, 219—242 (англ.)

Уравнения Коши—Римана определяют потенциальное движение невязкой несжимаемой жидкости. Автор дает обобщение этих уравнений и для одного частного случая указывает на возможность их приложений к аэродинамике.

Пусть $\zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} h_{11}, & h_{12} \\ h_{21}, & h_{22} \end{pmatrix}$; тогда непосредственным обобщением уравнений Коши—Римана будут уравнения

$$\zeta_u = H\zeta_v. \qquad (1)$$

Частный случай, имеющий приложение к аэродинамике, соответствует матрице

$$H = \begin{pmatrix} 0, & h \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = h(u, v, t). \qquad (2)$$

Более общими, чем (1), являются уравнения

$$\zeta'_u = W\zeta_u + A\zeta + C\zeta', \quad \zeta'_v = W\zeta_v + B\zeta + D\zeta'. \qquad (3)$$

Ставится вопрос о связи решений уравнений (1) с решениями уравнений $\zeta'_u = H'\zeta'_v$, $H' = \Omega H \Omega^{-1}$.

Если ζ' и ζ отличаются на бесконечно малую величину, то применение преобразований Баклунда позволяет построить дифференциальное уравнение в частных производных, из которого находится ζ и, следовательно, бесконечно близкая величина ζ'. Автор рассматривает более общие системы (3), в которых матрицы-коэффициенты заданы как функции u, v и некоторого параметра t, изменяющегося в интервале (t_0, t_1). Применение бесконечно малых преобразований Баклунда приводит к системе:

$$\zeta_{ut} = \omega\zeta_u + \alpha\zeta + \gamma\zeta_t, \quad \zeta_{vt} = \omega\zeta_v + \beta\zeta + \delta\zeta_t.$$

Решение $\zeta(u, v, t_1)$ этой системы получается из решения $\zeta(u, v, t_0)$ последовательным развертыванием бесконечно малых преобразований. В качестве частного случая рассматривается система, соответствующая матрице (2). Дифференциальные уравнения бесконечно малых преобразований в этом случае приводятся к трем каноническим формам: $g_{ut} = e^g$, $g_u = \operatorname{sh} g$, $g_{ut} = \operatorname{ch} g$. Решения последних уравнений представлены в виде обобщенных степенных рядов, для которых построены мажоранты. *И. С. Аржаных*

2690. Дифракция произвольного импульса от клина. Кей (The diffraction of an arbitrary pulse by a wedge. Kay Irvin), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 3, 419—434 (англ.)

Решается предельная задача: в фазовом пространстве xyt рассматривается бесконечный конус $\varphi = 0$ с вершиной в точке 0, часть которого вырезана неограниченным клином, образованным двумя плоскостями, пересекающимися вдоль оси конуса под углом 2β. Ищется решение волнового уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{c^2} u = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условию $u = 0$ $\left(\text{или } \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right)$ на плоскостях клина $\theta = \beta$, $\theta = 2\pi - \beta$ и принимающее заданные значения на границе конуса $\varphi = 0$.

Подстановкой $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2} - ct$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ уравнение (1) сводится к уравнению

$$u_{\theta\theta} + r^2 u_{rr} + r u_r + 2r^2 u_{\varphi r} + r u_\varphi = 0,$$

которое решается методом разделения переменных. В полученном решении

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n(\theta - \beta) \int_{L_n} A_n(\lambda) e^{\lambda(r-\varphi)} I_{k_n}(\lambda r)\, d\lambda,$$

k_n — корни уравнения $\sin 2k_n(\pi - \beta) = 0$, а $I_{k_n}(\lambda)$ — модифицированная функция Бесселя. Функции $A_n(\lambda)$ находятся из разложения граничного условия

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r) \sin k_n(\theta - \beta), \qquad (2)$$

которое приводит к интегральному уравнению

$$F_n(r) = \int_{L_n} A_n(\lambda) e^{\lambda r} I_{k_n}(\lambda r)\, d\lambda,$$

где $F_n(r)$ — коэффициент Фурье в разложении (2).

Если контур L_n — отрезок вещественной оси $(-\infty, 0)$, то преобразование Меллина равенства

$$\int_0^\infty F_n r^{x-1} dr = \int_0^\infty r^{x-1} dr \int_0^\infty A_n(-\lambda)\, e^{-\lambda r} I_{k_n}(-\lambda r)\, d\lambda$$

дает искомую функцию

$$A_n(-\lambda) = K \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(2\lambda)^{-x}\Gamma(k_n + x)\int_0^\infty F_n(r)\, r^{-x} dr}{\Gamma(k_n + 1 - x)\,\Gamma\left(x - \frac{1}{2}\right)}\, dx,$$

где $K = e^{i\pi k_n}/4\sqrt{\pi i}$. Как частный случай автор находит решение дифракционной задачи Келлера и Бланка (Keller J. B., Blank A., Communs Pure and Appl. Math., 1951, 4, № 1, 75—94), когда $F_n(r) = \text{const}$.

Н. С. Кошляков

2691. Течение в соплах и связанные с этим задач о цилиндрических и сферических волнах. Чжэнь Ю.-В. (в подлин. Чен Ю. В.) Механика. Сб.перев. и обз. иностр. период. лит-ры, 1954, № 4, 3—31; Перев. из Communs Pure and Appl. Math., 1953, 6, № 2, 179—229

См. РЖМат, 1955, 2229.

2692. Решение дифференциального уравнения теплопроводности при краевом условии, линейно зависящем от времени. (Исследование процесса охлаждения, соответственно нагревания, тела, помещенного в среду с равномерно переменной температурой). Эгервари, Ловаш-Надь (A hövezetési differenciálegyenlet megoldása az idötöl lineárisan függö kerületi feltétel mellett (egyenletesen változó hömérsékletü közegbe helyezett test hülési, ill. melegedési folyamának vizsgalata. Egerváry Jenö, Lovass-Nagy Viktor), Alkalm. mat. intéz. közl., 1952, 1, 11—22 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (венг.; резюме русс., франц.)

Определение функций, описывающих распределение температуры тел, помещенных в среду с равномерно переменной температурой. Функция, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$ при неоднородном краевом условии $b\frac{\partial u}{\partial n} + u = vt$ и при начальном условии $u(x, y, z, 0) = 0$, может быть представлена в виде суммы $u = u_1 + u_2$ частного решения $u_1 = vt + U(x, y, z)$, удовлетворяющего однородному дифференциальному уравнению и неоднородному краевому условию, и общего решения u_2, удовлетворяющего однородному дифференциальному уравнению с однородным краевым условием и начальным условием $u_2(x, y, z, 0) = U(x, y, z)$.

Этот способ дает возможность использовать формальную аналогию между задачей о процессе охлаждения (нагревания) и другими задачами математической физики (колебание мембран, кручение и т. д.).

Резюме авторов

2693. Тепловые напряжения вследствие вращающегося температурного поля. Мелан (Wärmespannungen infolge eines rotierenden Temperaturfeldes. Melan E.), Österr. Ingr.-Arch., 1954, 8, № 2—3, 165—170 (нем., резюме англ., франц.)

Исследуется вопрос об определении напряжений в круговом диске, расположенном в равномерно вращающемся температурном поле.

Методом Фурье решается задача: найти в круге с центром в начале координат функцию $T(r, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta T + c\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

при заданных значениях T на границе круга.

Д. М. Эйдус

2694. Вариационный метод в теории конвекций. Сорокин В. С., Прикл. матем. и механика, 1953, 17, № 1, 39—48

Рассматривается задача о равновесии неравномерно нагретой несжимаемой жидкости в поле тяжести. Из уравнений гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nu \nabla \mathbf{v} - \beta \mathbf{g} T,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, ρ — плотность, p — разность давлений, T — разность температур, β — коэффициент расширения, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести, ν — кинематический коэффициент вязкости, χ — температуропроводность, выводится, что равновесие возможно только, когда градиент температуры во всей массе жидкости постоянен и направлен вертикально. Для исследования устойчивости равновесия составляются уравнения для возмущений и ищется их решение, зависящее от времени по закону $e^{-\sigma t}$. Эти уравнения имеют вид:

$$-\sigma \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} + \beta g T \gamma,$$

$$-\sigma T = A_0 \mathbf{v}\gamma + \chi \Delta T.$$

Не решая последние уравнения, автор показывает, что их можно рассматривать как уравнения Эйлера некоторой вариационной задачи о нахождении стационарного значения интеграла

$$\int \left[\frac{\nu}{\beta g}(\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 + \frac{\chi}{A_0}(\operatorname{grad} T)^2 - 2\gamma \mathbf{v} T\right] dV$$

при условиях

$$K = \int \left(\frac{\mathbf{v}^2}{\beta g} + \frac{T^2}{A_0}\right) dV = 1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

причем на границах полости и на бесконечности имеют место, например, условия

$$T = T^*, \quad \varkappa \frac{\partial T}{\partial n} = \varkappa^* \frac{\partial T^*}{\partial n},$$

$$\mathbf{v} = 0; \quad T \to 0 \text{ на бесконечности.}$$

Автор указывает, как можно, используя вариационный метод, решить задачу о нахождении критических градиентов температур, при которых наблюдается скачкообразное возникновение конвекции.

И. П. Гинзбург

2695. Результаты и гипотезы в математической теории до- и сверхзвуковых течений газа. Берс

(Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows. Bers Lipman), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 1, 79—104 (англ.)

Критический обзор работ об обтекании идеальным сжимаемым газом произвольного профиля. Рассматривается двумерный стационарный потенциальный поток. Точная формулировка соответствующей математической задачи следующая:

Пусть P — простая замкнутая кривая в z-плоскости ($z = x + iy$), имеющая непрерывные производную и кривизну, за исключением, может быть, одной точки z_T (острая кромка).

Требуется найти решение $\varphi(x, y)$ дифференциального уравнения

$$(\rho\varphi_x)_x + (\rho\varphi_y)_y = 0,$$

где $\rho = \rho(q)$, $q^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$, $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей, q — скорость, ρ — плотность потока. Функция $\varphi(x, y)$ определена в области, внешней к P, и имеет в ней однозначно определенные производные φ_x, φ_y, которые равномерно удовлетворяют на P условию Гёльдера и обращаются в 0 в z_T; $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ на P; $\varphi_x \to q_\infty$, $\varphi_y \to 0$ при $z \to \infty$, где q_∞ ($0 < q_\infty < q_{кр}$) — заданное число.

Функция $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая этим условиям, называется решением задачи $\Pi(P, q_\infty)$ или течением вокруг P со скоростью свободного течения q_∞.

Рассматриваются различные подходы к решению задачи $\Pi(P, q_\infty)$: 1) метод возмущения, 2) метод конечных разностей, 3) построение точных примеров; вкратце перечисляются основные результаты, принадлежащие Рэлею, Лисену, Прандтлю, Глауэрту, Чаплыгину, Берману, Франклю, Келдышу, Христиановичу, Берсу и др.

Автор подробно останавливается на теоремах существования и единственности в случае дозвукового течения. Формулируется следующая теорема существования и единственности:

Для данного профиля P существует число $\hat{q} \leqslant q_{кр}$ такое, что для любого q_∞, $0 < q_\infty < \hat{q}$, краевая задача $\Pi(P, q_\infty)$ имеет единственное решение $\varphi = \varphi^{(q_\infty)}$. Для этого решения $q_{max} < q_{кр}$, и производные φ_x, φ_y являются непрерывными функциями q_∞. Если q_∞ пробегает интервал $0 < q_\infty < \hat{q}$, то q_{max} принимает все значения в интервале $0 < q < q_{кр}$. Если $q_\infty \to 0$, то $\varphi^{(q_\infty)} \to 0$, но $\frac{\varphi^{(q_\infty)}}{q_\infty} \to \varphi^{(0)}$ — потенциалу несжимаемого потока вокруг P.

Единственность решения Π была доказана впервые Франклем и Келдышем (для достаточно малых q_∞) (Докл. АН УССР, 1934, 12, 561—607). Для произвольных дозвуковых скоростей теорема доказана автором методами теории псевдоаналитических функций (доказательство публикуется).

Далее автор рассматривает задачу Π для течений со сверхзвуковыми скоростями, связывая ее с общими теоремами существования и единственности для систем смешанного типа. Рассматриваются различные исследования, связанные с задачами Трикоми и Франкля. Высказываются предположения:

A. Пусть задан сверхзвуковой поток, обтекающий профиль P со скоростью q_∞ на бесконечности. Пусть $\widetilde{P}$ — профиль, совпадающий с P всюду, за исключением критической дуги. Тогда не существует потенциального течения вокруг $\widetilde{P}$ с той же самой скоростью q_∞ на бесконечности.

B. В предположении A, не существует потенциального течения Π вокруг P с числом $\widetilde{q_\infty}$, отличным от числ $_\infty$, но достаточно близким к нему.

C. Проблема возмущения не может быть поставлена корректно для сверхзвукового течения. Это означает, что если даже задача $\Pi(P, q_\infty)$ может быть решена для непрерывно меняющегося семейства профилей P, зависимость решения от P не является достаточно гладкой.

Библиография, 68 названий. *Н. Н. Яненко*

2696. Теория сопротивления в потенциальном потоке (Части I—IV). Гхош (A theory of resistance in potential flows (Parts I—IV). Ghosh N. L.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, **20**, № 1, 74—103 (англ.)

В начале первой части, посвященной решению парадокса Даламбера, дан критический обзор существующих теорий сопротивления тел при движении в несжимаемой жидкости.

Для построения теории сопротивления тел в потенциальном установившемся потоке автор принимает лишь два допущения: 1) в реальной жидкости, находящейся в движении, вязкость μ не равна нулю; 2) жидкость может иметь касательную составляющую скорости на поверхности тела. Последнее допущение позволяет ввести в рассмотрение вязкие течения, обладающие потенциалом скорости. Полное сопротивление тела, находящегося в подобном установившемся потоке, в общем случае вычисляется при помощи составляющих напряжений

$$p_{\alpha\alpha} = -p + 2\mu e_{\alpha\alpha}, \quad p_{\beta\beta} = -p + 2\mu e_{\beta\beta},$$
$$p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha} = \mu e_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

где

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\beta} + \frac{w}{h_3 h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\gamma},$$
$$e_{\beta\beta} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{w}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\gamma} + \frac{u}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}, \tag{2}$$
$$e_{\alpha\beta} = \frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{h_2}\right) + \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial h_1},$$

причем u, v, w представляют составляющие скорости, нормальные к ортогональным поверхностям $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$.

В случае плоского течения с комплексным потенциалом $w_1 = \varphi_1 + i\psi_1$, вместо формул (1), (2), имеются аналогичные формулы

$$p_{\alpha\alpha} = p_{\varphi_1\varphi_1} = -p + \mu\frac{\partial q_1^2}{\partial\varphi_1},$$
$$p_{\beta\beta} = p_{\psi_1\psi_1} = -p - \mu\frac{\partial q_1^2}{\partial\varphi_1}, \tag{3}$$
$$p_{\alpha\beta} = p_{\varphi_1\psi_1} = \mu\frac{\partial q_1^2}{\partial\psi_1}.$$

На основе (3) дано обобщение формулы Чаплыгина—Блязиуса для подсчета полного сопротивления цилиндра, движущегося с равномерной скоростью в несжимаемой жидкости:

$$X - iY = -\frac{1}{2}\rho i \oint \left(\frac{\partial W_1}{dz}\right)^2 dz + 2\mu i \oint_{W_1=\overline{W}_1} \frac{\partial q_1^2}{\partial W_1}\, d\overline{z}, \quad (4)$$

в формулах (3), (4) q_1 — модуль скорости потока с потенциалом W_1.

Дано приложение (4), (1), (2) к вычислению полного сопротивления кругового и эллиптического цилиндров и шара. Существенные результаты первой части сводятся к утверждениям:

1. Твердое тело, движущееся в реальной жидкости, испытывает положительное сопротивление и в том случае, когда поток не имеет циркуляции или вихрей. Это разрешает парадокс Даламбера.

2. Возможны движения твердого тела с ограниченным кильваторным следом; при этом тело будет испытывать положительное сопротивление. Это утверждение разрешает парадокс Бриллуена, в силу которого положительное сопротивление тела невозможно при ограниченных кильваторных следах.

3. В первичном потенциальном течении, т. е. при отсутствии кильваторного следа, вихрей или циркуляции, давление в передней части обтекаемого тела превышает давление в задней части.

4. Сопротивление некоторых тел, найденное на основе предлагаемой теории, количественно отлично от сопротивления, найденного другими методами, например по методу Стокса — Озеена. Это объясняется различным характером изучаемых течений, исследуемых сопоставляемыми методами.

Во второй части рассматривается вопрос о рассеивании потенциала для реальной несжимаемой жидкости. Найдено условие для поддержания установившегося течения: $RU = D$, где R — сопротивление тела, движущегося с равномерной скоростью; D — скорость рассеивания потенциала. Приведенные результаты вычислений для кругового и эллиптического цилиндров и для шара показывают, что установившееся потенциальное течение вокруг эллиптического цилиндра и шара не может существовать. Это обстоятельство истолковывается как признак образования кильваторного следа.

В третьей части рассматривается построение двумерных потенциальных течений около твердого тела, за которым имеется некоторая область неподвижной жидкости, обтекаемая внешним потоком. Для искомого течения вводится «вторичный» комплексный потенциал W_2 в форме

$$W_2 = W_1 + \Xi \frac{\alpha_r}{(r) W_1^r}, \quad (5)$$

где W_1—представляет «первичный» комплексный потенциал обтекания тела без кильваторного следа. Сохраняя в ряде (5) конечное число членов, автор исследовал некоторые типы течений с кильваторным следом; подробно разобраны случаи кругового и эллиптического цилиндров.

В четвертой части на основе общих соображений первой и третьей частей работы рассматривается вопрос о сопротивлении тел в потенциальном потоке при наличии позади тела кильваторного следа, а также вопрос о рассеивании механической энергии и условие поддержания установившегося движения рассмотренных гидромеханических систем.

В. П. Пилатовский

2697. Док конечной протяженности. Р у б и н (The dock of finite extent. R u b i n H a n a n), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 2, 317—344 (англ.)

Исследуется кинематический закон волнового движения воды на поверхности океана при рассеянии заданных прогрессивных волн, встречающих на своем пути препятствие (док) конечных размеров. Пользуясь известной постановкой граничной задачи для поверхностных волн в несжимаемой жидкости в случае малых колебаний и вводя безразмерные величины, автор рассматривает задачу: определить потенциал скорости $\varphi^* = \varphi(x, y)\cos(t - \beta)$, где φ — гармоническая функция в полуплоскости $y < 0$, удовлетворяющая граничным условиям: $\varphi_y(x, 0) = 0$ при $|x| < a$; $\varphi_y(x, 0) - \varphi(x, 0) = 0$ при $|x| > a$; $\varphi_y(x, y) - \varphi(x, y)$ ограничена на бесконечности; $|x| < a$ соответствует препятствию. При $x \to \pm\infty$, φ асимптотически стремится к потенциалу стоячих волн.

Пусть $\psi(x, y)e^{-t}$ — функция тока, где ψ — непрерывная со своими производными до второго порядка функция в полуплоскости $y \leqslant 0$, за исключением точек $(\pm a, 0)$, гармоническая при $y < 0$ и удовлетворяющая граничным условиям $\psi(x, 0) = 0$ при $|x| > a$, $\psi_{xx}(x, 0) - \psi_y(x, 0) = 0$ при $|x| < a$, и условию регулярности на бесконечности. Доказывается, что φ выражается явно через ψ, а ψ при помощи гармонической функции $\varphi^R(x, y)$, построенной для аналогичной проблемы К. Фридрихсом и Г. Леви (Fridrichs K. O., Lewy H. Communs Appl. Math., 1948, 1, № 2, 135—148), представляется в виде

$$\psi = \varphi_y^R(x - a, y) - \varphi^R(x - a, y) + \psi^*(x, y),$$

где ψ^* — гармоническая в полуплоскости $y < 0$ функция, удовлетворяющая тем же условиям регулярности, что и ψ, причем $\psi^*(x, 0) = \varphi^R(x - a, 0)$ при $x \leqslant -a$, $\psi^*(x, 0) = 0$ при $x \geqslant a$. ψ^* находится как решение следующей вариационной задачи: из всех функций $w(x, y)$, удовлетворяющих граничным условиям для ψ^*, непрерывных при $y \leqslant 0$, включая бесконечно удаленные точки, имеющих кусочно-непрерывные первые производные при $y < 0$ и кусочно-непрерывную $w_x(x, 0)$ при $|x| < a$, найти такую, которая сообщает минимум функционалу

$$\iint_{y<0} (w_x^2 + w_y^2)\, dx\, dy + \int_{-a}^{-a} [w(x, 0)]^2\, dx.$$

Наконец, потенциал скорости прогрессивных волн при наличии препятствия строится в виде суммы потенциалов φ^* и $\overline{\varphi^*} = \varphi_x(x, y)\sin(t - \beta)$.

Д. Е. Долидзе

2698. Условия разрешимости основной задачи статики упругого тела. Ф и к е р а (Condizioni perché sia compatibile il problema principale della statica elastica. F i c h e r a G a e t a n o), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci fis., mat. e natur., 1953, 14, № 3, 397—400 (итал.)

Указаны необходимые условия существования вектора деформации $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ упругого тела A, удовлетворяющего внутри A дифференциальному уравнению

$$\Delta\mathbf{u} + k\ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{u} = f, \quad k > 1/3,$$

и следующим условиям на границе Σ:

$$u = 0\ (\text{на } \Sigma_1),\ L(u) = g\ (\text{на } \Sigma_2),$$

где $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = 0$, $\overline{\Sigma_1} + \overline{\Sigma_2} = \Sigma$, $L(u)$ — вектор напряжения поверхностных сил. Эти условия имеют вид

$$\int_{\Sigma_1 + B} g\, d\alpha + \int_{A+\Sigma} f\, d\beta = 0,$$

$\alpha(E)$ и $\beta(E)$ — аддитивные вектор-функции ограниченной вариации B-измеримых подмножеств $\Sigma_2 + B$ и $A + \Sigma$ соответственно, причем $B = \Sigma - (\Sigma_1 + \Sigma_2)$.

И. Н. Векуа

2699. **О вариационном принципе Е. Рейснера для статики сплошной среды. М а н а к о р д а** (Sopra un principio variazionale di E. Reissner per la statica dei mezzi continui. M a n a c o r d a T r i s t a n o), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 2, 154—159 (итал.)

Формулируется вариационный принцип для конечных упругих деформаций, обобщающий ранее опубликованный принцип Рейснера (Reissner E., J. Math. Phys., 1950, **29**, 90—95) для малых деформаций. Отметим, что сам Рейснер сформулировал вариационный принцип для конечных упругих деформаций в 1953 г. (РЖМат, 1954, 4432).

С. Г. Михлин

2700. **Осесимметричная задача удара для среды с трансверсальной изотропией. П е й н** (On axially symmetric crack and punch problems for a medium with transverse isotropy. P a y n e L. E.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, № 3, 466—473 (англ.)

Рассматривается полупространство $z > 0$, для которого ось z служит осью упругой симметрии. Для этого полупространства ставится задача об определении полей напряжений и смещений при условиях: 1) плоскость $z = 0$ свободна от касательных напряжений; 2) в круге $r < b$ той же плоскости задано нормальное смещение $w = f_1(r)$, а вне этого круга $\sigma_z = 0$. Задача сводится к построению гармонической в полупространстве функции $\Phi(r, z)$ по краевым условиям

$$\Phi(r, 0) = f(r),\ r < b; \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,\ r > b;$$

функция $f(r)$ отличается от $f_1(r)$ только постоянным множителем.

Решение последней задачи хорошо известно. Автор рекомендует решать ее посредством интегрального преобразования, которое он называет преобразованием Мелера. В том случае, когда

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (b^2 - r^2)^n,$$

функция Φ строится в виде ряда по функциям Лежандра.

Рассмотрены также некоторые другие типы краевых условий.

С. Г. Михлин

2701. **Решение плоской задачи теории упругости в комплексном и гиперкомплексном представлении. Ш т а л ь** (Über die Lösung ebener Elastizitätsaufgaben in komplexer und hyperkomplexer Darstellung. S t a h l K.), Ingr-Arch., 1954, **22**, № 1, 1—20 (нем.)

Производится сравнение двух методов решения плоской задачи теории упругости — метода Колосова — Мусхелишвили, основанного на применении функций комплексного переменного, и метода, основанного на применении гиперкомплексных функций (Sobrero L., Mem. Reale Acad. d'Italia, 1934/35, сер. 1, **6**, 1—64; Hamburg Math. Einzelschriften, Leipzig, B. G. Teubner, 1934, H. 17, 509). По последнему методу функция напряжений представляется в форме $f(s) = a + jb + j^2c + j^3d$, где a, b, c и d — действительные величины, $s = x + jy$ — гиперкомплексная переменная, j — гиперкомплексная константа, определяемая условием $(1 + j^2)^2 = 0$ и связанная с мнимой единицей i равенством $i = (3j + j^3)/2$. Коэффициенты функции $f(s)$ соответствуют компонентам напряжений $\sigma_x \equiv -c$, $\sigma_y \equiv a$, $\tau_{xy} \equiv d$. Решение плоской задачи теории упругости сводится к определению аналитической функции $f(s)$, удовлетворяющей граничным условиям.

Пользуясь представлением гиперкомплексного числа через два комплексных, автор устанавливает связь между гиперкомплексной функцией $f(s)$ и комплексными функциями напряжений $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$f(s) = 4\Phi(z) + (1 + j^2)[\Psi(z) - 2\Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z)].$$

Даны формулы преобразования основных выражений при параллельном переносе осей и при переходе к криволинейным ортогональным координатам. Рассмотрены приложения преобразования к функциям напряжений для бесконечной, полубесконечной и круговой областей.

К. В. Соляник-Красса

2702. **К краевой задаче для изотропных круглых цилиндрических оболочек. Р ю д и г е р** (Ein Beitrag zum Randstörungsproblem isotroper Kreiszylinderschalen. R ü d i g e r D.), Ingr-Arch., 1954, **22**, № 3, 160—162 (нем.)

Задача сводится к интегрированию уравнения

$$\Delta^4\Phi + \frac{1 - \nu^2}{k}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} = 0,$$

где ν — постоянная Пуассона, k — постоянная, зависящая от толщины и радиуса оболочки. Краевые условия не формулируются явно. Строится частное решение вида

$$\Phi = \exp(\sqrt{m + 1}\,\lambda\varphi)\cdot\cos\lambda\xi, \quad \lambda = n\pi a / L,$$

где n — целое число a — радиус и L — длина оболочки; постоянные m и λ связаны уравнением

$$m^4 + \frac{1 - \nu^2}{\lambda^4 k} = 0.$$

С. Г. Михлин

2703. **О грушевидной фигуре. Э в р а р** (Sur la figure piriforme. E v r a r d L é o n), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 2, 130—138 (франц.)

Продолжение ранее опубликованной работы (Evrard L., Ann. astrophys., 1951, **14**, № 1, 17—39). Опираясь на выведенные там разложения по степеням $1/l$, где l — расстояние между двумя компонентами двойной звезды (из которых одна предполагается сохраняющей сферическую форму), и учиты-

вая члены до четвертого порядка включительно, автор показывает, что другая компонента принимает грушевидную форму Пуанкаре. *В. И. Левин*

2704. К диффракции на круговом отверстии. Браунбек (Zur Beugung an der kreisförmigen Öffnung. Braunbek Werner), Z. Phys., 1954, **138**, № 1, 80—88 (нем.)

В предыдущих статьях автора (Z. Phys., 1950, **127**, 381 405) дано приближенное решение задачи о диффракции плоской скалярной волны, падающей нормально на круглое отверстие в плоском экране, на котором волновая функция u удовлетворяет граничному условию $u = 0$, при условии $ka \gg 1$ (k — волновое число, a — радиус отверстия). Заменяя значения $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial z}$ на экране теми значениями, которые получаются при диффракции на полуплоскости, автор приходит к некоторой функции u_1, выраженной в виде суммы двух интегралов. Заменой значений u на отверстии получается функция u_2, также выраженная в виде интегралов. Вычисляя эти интегралы на оси отверстия при больших значениях ka, автор получает ($r_0 = \sqrt{a^2 + z^2}$, z — расстояние от плоскости экрана):

$$u_1 = e^{ikz} - e^{ikr_0}\sqrt{1 + a/r_0} + \ldots, \quad (1)$$

$$u_2 = e^{ikz} - e^{ikr_0}\sqrt{1 + a/r_0} + \ldots, \quad (2)$$

где невыписанные члены имеют порядок $1/ka$. Поскольку эти члены различны для u_1 и u_2, являющихся приближенными выражениями одной и той же функции u, их конкретные выражения физического смысла не имеют.

В реферируемой статье более тщательно, чем раньше, выводятся разложения (1) и (2), в частности показывается, что формула (2) применима лишь при условии $z \gg \sqrt{a/k}$, которое оговорено не было. Это условие разъясняет противоречие, замеченное Боукампом (в неопубликованном отчете) в первоначальных статьях автора. *Л. А. Вайнштейн*

2705. О применении дифференциального уравнения Бесселя и бесселевых функций первого рода в электротехнике. Фрюауф (Über die Anwendung der Besselschen Differentialgleichung und der Besselschen Zylinderfunktionen. 1. Art in der Elektrotechnik. Frühauf Hans), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, **2**, № 3, 487—501 (нем.)

Приложения цилиндрических функций к некоторым электротехническим проблемам, например к теории частотной и фазовой модуляции, к теории распространения электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе, к расчету цепей, предназначенных для усиления и выпрямления тока и т. д. Популяризируются математические методы среди инженерно-технических работников соответствующих специальностей. *Н. Н. Лебедев*

2706. Поверхности сшивания фазы в теории двойного решения. Фер (Surfaces de raccord des phases dans la théorie de la double solution. Fer Francis), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 24, 2286—2287 (франц.)

Рассматривается уравнение вида

$$g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^\rho\, \partial x^\sigma} + b^\rho \frac{\partial u}{\partial x^\rho} + cu = 0 \quad (\rho, \sigma = 1, 2, 3, 4;\ x^4 = t), \quad (1)$$

где $g^{\rho\sigma}$ — действительные, $b^\rho = \beta^\rho + i\gamma^\rho$ — комплексные коэффициенты. Решение представляется в форме $u = fe^{i\varphi}$, где f — амплитуда, а φ — фаза решения.

Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx^\rho}{d\lambda} = g^{\rho\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma} + \frac{1}{2}\gamma^\rho \quad (2)$$

(λ — текущий параметр) называются автором линиями де-Бройля. Это как раз те линии, которые де-Бройль принимал как единственно возможные для траекторий частиц, описываемых волновым уравнением (1) (Broglie L. de, J. Phys., 1927, 8, 225); они являются характеристиками для уравнений в частных производных относительно $\Lambda(x^\rho)$:

$$\left(g^{\rho\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma} + \frac{1}{2}\gamma^\rho\right)\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\rho} = 0.$$

Поверхности $\Lambda = \text{const}$ называются поверхностями де-Бройля.

Утверждается, что, если два решения уравнения (1) сшиваются на пространственно-временной поверхности Σ, т. е. на поверхности Σ совпадают: 1) амплитуды обоих решений, 2) фазы со своими первыми и вторыми производными, то эта поверхность Σ является поверхностью де-Бройля. Если дано одно решение (1), то существует (в случае аналитичности коэффициентов) бесконечное число решений, сшиваемых с ним на заданной поверхности де-Бройля. Доказательства не приводятся. *Ю. Н. Днестровский*

2707. Решение уравнений квантованных полей. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 2, 209—212

На примере уравнения упрощенного типа для оператора $\psi(x)$:

$$\Box\psi(x) - \varkappa^2\psi(x) = \lambda\psi^2(x) + J(x), \quad (1)$$

относящегося к полю скалярных частиц с малой $\varkappa$, рассматривается методика решения уравнений квантовой теории поля. В (1) $J(x)$ — внешний ток, λ — постоянная.

Неоднородное уравнение (1) можно заменить однородным линейным уравнением для среднего вакуумного значения матрицы рассеяния $z = \langle \exp i\mathscr{L}\rangle_0$ ($\mathscr{L}$ — функция Лагранжа), если учесть, что функциональная производная от z по току $J(x)$ выражается через среднее нормированное значение $\psi(x)$:

$$-i\frac{\delta z}{\delta J(x)} = z\langle\psi(x)\rangle.$$

Уравнение для функционала z имеет вид

$$-i[\Box - \varkappa^2]\frac{\delta z}{\delta J(x)} + \lambda\frac{\delta^2 z}{(\delta J(x))^2} = J(x)z \quad (2)$$

с начальным условием $\delta z/\delta J(x) = 0$ или $J(x) = 0$.

Такая форма основного уравнения поля имеет преимущество по сравнению с системой функциональных уравнений Швингера (Schwinger T., Proc. Nat. Acad. Sci., 1951, **37**, 452, 455), которая нелинейна и не полна.

Для решения уравнения (2) предлагается ввести пространственно-временную решетку и рассматривать z как функцию от значений внешнего тока J_0, J_1, ..., J_n в узлах решетки. Тогда методом Фурье

можно получить решение (2) в виде обобщенного интеграла Эйри (функционала Эйри), значение которого однозначно определяется выбором контура интегрирования.

Показано, как предложенный метод может быть распространен на случай полей, представляющих физический интерес.

Метод имеет много общего с лагранжевым методом Фейнмана (Feynman R. P., Phys. Rev., 1950, **80**, № 3, 440). *Ю. В. Новожилов*

2708. Об одном методе решения некоторых дифференциальных уравнений математической физики. Феньё (A matematikai fizika néhány differenciálegyenletének egy megoldási modszeréöl. F e n y ö I s t v á n), Alkalm. mat. intér. közl., 1952, **1**, 355—362 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (венг.; резюме русс., франц.)

См. также: 2485, 2463, 2650, 2712, 2713, 2719, 2721, 2768, 2769, 2851, 2881, 2885, 2906

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2709. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Феньё (A szinguláris integrálegyenletek egy osztályáról. F e n y ö I s t v á n), Alkalm. mat. intéz. közl., 1952, **1**, 345—353 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (венг.; резюме русс., франц.)

Используя одну теорему А. М. Эйроса о преобразовании Лапласа (Матем. сб., 1935, **42**, 699—706), автор решает сингулярные интегральные уравнения первого и второго родов с ядрами, характеризуемыми теоремой Эйроса. Метод иллюстрируется на двух интегральных уравнениях математической физики. *Резюме автора*

2710. К теории линейных сингулярных интегральных уравнений. Гусейнов А. И., Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 65—84

Рассматривается банахово пространство H функций, заданных на (a, b) и удовлетворяющих условиям

$$|u(x)| \leqslant L\,|x-a|^{-\alpha}\,|x-b|^{-\beta}, \qquad (1)$$

$$|u(x+\Delta x)-u(x)| \leqslant \frac{L\,|\Delta x|^{\delta}}{|x-a|^{\alpha+\delta}\,|x+\Delta x-b|^{\beta+\delta}}, \qquad (2)$$

где $0<\alpha, \beta, \delta<1$, L — константа. Норма $\|u(x)\|$ в пространстве H определяется как минимум всех L, при которых выполнены неравенства (1), (2). Доказывается полнота пространства H.

Изучается оператор $B(u)$:

$$B(u)=\lambda\int_a^b [k(x,\ s)\,u(s)/(s-x)]\,ds + f(x),$$

где $f \in H$, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В основной части работы (лемма 2) доказывается, что оператор $B(u)$ действует и непрерывен в пространстве H, если ядро $k(x, s)$ ограничено и

$$|k(x+\Delta x,\ s+\Delta s)-k(x,\ s)| \leqslant A\,[|\Delta x|^{\delta_1}+|\Delta s|^{\delta}],$$

где $\delta_1 > \delta$. При малых λ оператор B удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений. Отсюда автор получает теорему о существовании единственного в H решения линейного сингулярного интегрального уравнения $u = B(u)$. *М. А. Красносельский*

2711. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений. Чикин Л. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, **113**, № 10, 57—105

Нормальным случаем краевой задачи Римана (употребительны еще термины «задача Гильберта», «задача линейного сопряжения», «задача Гильберта — Привалова») считается тот, когда в краевом условии

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) + g(t)$$

коэффициент $G(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера и не обращается в нуль.

Обобщаются результаты Ф. Д. Гахова (Изв. Казанск. физ.-матем. о-ва, 1949, **14**, сер. 3, 75—159) на случай более общих, имеющих особенности, краевых условий. Предлагается единый метод для рассмотрения следующих особых случаев: функция $G(t)$ имеет 1) разрывы 1-го рода, 2) нули целого порядка, 3) бесконечности целого порядка.

Благодаря обобщению понятия индекса и расширению класса допустимых решений автору удается установить для всех особых случаев теоремы о разрешимости и числе решений как однородной, так и неоднородной задач Римана в том же виде, как они формулируются для обыкновенного случая (число линейно независимых решений однородной задачи равно числу положительных единиц индекса; число условий разрешимости равно числу отрицательных единиц последнего).

Во второй главе исследуется сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$A(t)\,\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi i}\int M(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t) \qquad (1)$$

для случая, когда $S(t) = A(t) + B(t)$ или $D(t) = A(t) - B(t)$ обращаются в нуль целого порядка на контуре, что соответствует тому, что для краевой задачи Римана, соответствующей характеристическому уравнению ($M \equiv 0$), имеют место особые случаи 2), 3).

При развитии этой теории существенно используется и обобщается введенное Адамаром понятие интеграла от функции, обращающейся в промежутке интегрирования в бесконечность любого конечного порядка. Далее интегральное уравнение (1) обобщается и возникает новый тип так называемого «нагруженного» уравнения. Последнее получается прибавлением к левой части уравнения (1) некоторого оператора $R\varphi$, дающего возможность рассматривать интеграл, стоящий в левой части, в смысле интеграла Коши-Адамара.

Строится общая теория «нагруженных» сингулярных интегральных уравнений, из которой как частный случай получается теория уравнения (1). *Ф. Д. Гахов*

2712. О рекуррентных интегро-дифференциальных уравнениях нормальной формы, интегральные

члены которых содержат производные неизвестных функций. Жерме (Sur des équations intégrodifférentielles récurrentes de forme normale, dont les termes intégraux contiennent les dérivées des fonctions inconnues. G e r m a y R. H.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, **67**, сер. 1, № 3, 177—185 (франц.)

Доказывается следующая теорема: рекуррентная система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_n}{dx} = F_n[x,\ y_n(x),\ y_{n+1}(x);\ W_{n1}(x),\ \ldots,\ W_{np}(x)],$$

где $W_{nj} = \int_{x_0}^{x} f_{nj}[x,\ s;\ y_n(s), y_{n+1}(s); y_n'(s), y_{n+1}'(s)]\,ds$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, имеет, и притом единственное, непрерывное в некотором достаточно малом интервале $(x_0,\ x_0 + h)$ решение: $Y_1(x)$, $Y_2(x), \ldots,$ удовлетворяющее условиям $Y_n(x_0) = y_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, если выполнены следующие условия: $F_n(x, y, z, w_1, \ldots, w_p)$, $f_{nj}(x, s; u, v; u', v')$ $(n = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 1, \ldots, p)$ ограничены в совокупности и равностепенно непрерывны при $x_0 \leqslant x, s \leqslant x_0 + a$; $y_0 - b \leqslant y, z, u, v \leqslant y_0 + b$; $|w_1|, \ldots, |w_p| \leqslant C$; $r_0 - d \leqslant u', v' \leqslant r_0 + d$ $(a, b, c, d$ — некоторые положительные числа). Предполагается далее, что для каждого n, $F_n(x_0, y_0, y_0; 0, \ldots, 0) = r_0$ и что F_n и f_{nj} удовлетворяют условиям Липшица по переменным $y, z, w_1, \ldots, w_p$ и u, v, u', v' соответственно, с константами, не зависящими от n.

Я. Б. Лопатинский

2713. Об одном новом телеграфном уравнении. В а с и л а к е (Asupra unei noi ecuaţii a telegrafiştilor. V a s i l a c h e S e r g i u), Studii şi cercetări mat., 1953, **4**, № 3—4, 373—393 (рум.; резюме русс., франц.)

Система интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(Li)}{\partial t} + Ri + \int_0^t \varphi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau} i(z,\ \tau)\,d\tau = -\frac{\partial v}{\partial z}, \\ &\frac{\partial(Cv)}{\partial t} + Gv + \int_0^t \psi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau} v(z,\ \tau)\,d\tau = -\frac{\partial i}{\partial z} \end{aligned} \qquad (1)$$

решается при нулевых начальных условиях и граничном условии $v(0, t) = (E(t)\,(E(0) = E'(0) = 0)$. Здесь R и G — постоянные, φ и ψ — заданные функции точнее они не определяются, но в дальнейшем встречаются φ'' и ψ'),

$$L = L_0(1 + m\cos\Omega t),\ C = C_0(1 + n\cos\Omega t).$$

Физически система (1) описывает электромагнитные явления в телеграфном проводе с учетом линейного магнитного и диэлектрического последействия. Она была рассмотрена М. И. Розовским (Докл. АН СССР, 1948, **59**, 1265—1268).

Исключая из системы (1) $i(z, t)$, автор при помощи замены переменных приводит задачу к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial u} + p(u)\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\right] + q(u)\,w = \int_0^u K(u,\ v)\,w(u,\ v)\,dv$$

при условиях $w(x,\ 0) = 0$, $w(u/2,\ u) = A(u)$.

Интегрируя это уравнение по прямоугольнику $u/2 \leqslant \xi \leqslant x$, $0 \leqslant \eta \leqslant u$, после некоторых преобразований автор получает интегральное уравнение, которое он решает, применяя метод последовательных приближений.

В работе имеется много опечаток.

Э. Я. Риекстыныш

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2714. К потенциальному обтеканию решеток. И с а й (Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter. I s a y W o l f g a n g - H e r m a n n), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 12, 397—409 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

Исследуется явление течения жидкости через решетку, образуемую лопатками турбины.

Пусть u_0, v_0 — компоненты невозмущенного потока жидкости, u_γ, v_γ — компоненты дополнительного вектора скорости, возникающего за счет обтекания решетки с периодом l в направлении оси y. Величина $u_\gamma - iv_\gamma$ представляется в виде

$$u_\gamma - iv_\gamma = (i/2l)\int_C \gamma(s)\,\mathrm{cth}\,[\pi(z-\zeta)/l]\,ds, \qquad (1)$$

где C — линейный профиль решетки, s — длина дуги его, ζ — точка на профиле решетки, $\gamma(s)$ — неизвестная функция. Из равенства (1) и из равенства

$$y'(x) = [v_0 + v_\gamma(x, y(x))]/[u_0 + u_\gamma(x, y(x))],$$

где $y = y(x)$ $(-a < x < a)$ — уравнение профиля C, получается интегральное уравнение

$$f(x) = \pi^{-1}\int_{-a}^{a} \sigma(\xi)\,[(x-\xi)^{-1} + H(x,\ \xi)]\,d\xi, \qquad (2)$$

где $\sigma(\xi) = \gamma(\xi)\sqrt{1 + y'^2(\xi)}$, $f(x) = 2(-u_0 y'(x) + v_0)$, $H(x, \xi)$ — заданная функция, непрерывная по обеим переменным x и ξ. После замены переменных $x = -a\cos t$, $\xi = -a\cos\tau$ уравнение (2) принимает вид

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega(\tau)\left\{\frac{1}{\cos\tau - \cos t} + aH(t, \tau)\right\}\sin t\,d\tau, \qquad (3)$$

где $\omega(\tau) = \sigma(\tau)\sin\tau$, $g(t) = f(t)\sin t$. Разлагая функцию $H(t, \tau)\sin t$ в ряд Фурье по функциям $\sin\mu t\cos\nu\tau$ $(\mu, \nu = 0, 1, \ldots)$, автор сводит решение интегрального уравнения (3) к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и показывает, что итерационный процесс в применении к этой системе сходится, если выполнено условие

$$\int_0^\pi\int_0^\pi [H(t,\ \tau)\sin t]^2\,dt\,d\tau < \pi^2 a^{-2}.$$

Точно такие же исследования приводятся для случая обтекания отдельной решетки с профилем конечной толщины, а также для случаев двух решеток с линейным профилем и с профилем конечной толщины.

Г. Н. Положий

2715. О фокусировке наэлектризованных частиц. И ш л и н с к и й А. Ю., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 4, 721—724

Пусть из начала системы координат вылетают с одной и той же скоростью v по разным направлени-

ям, лежащим в плоскости xy, наэлектризованные частицы с одинаковыми зарядами e и массами m, напряжение поля H является функцией координаты x. Скорость частиц постоянна. Какова должна быть функция $H(x)$, чтобы траектории всех частиц прошли через одну и ту же точку, расположенную на оси y на заданном расстоянии l от начала координат? Автор сводит решение этой задачи к решению интегрального уравнения вида

$$\int_0^s K(s-t)\,F(t)\,dt = l/2,$$

где $K(u) = (1-u)/\sqrt{u(2-u)}$, $u = s-t$.

Решение находится в виде ряда

$$H(x) = \frac{\pi^2 mcvx}{el^2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi x}{l}\right)^2 + \frac{9}{40}\left(\frac{\pi x}{l}\right)^4 - \ldots\right],$$

где c — скорость света. *П. Д. Калафати*

2716. Интегральные уравнения теории регулирования. Блох З. Ш., Сб. науч. работ Моск. инж.-физ. ин-та, 1954, № 7, 98—104

В переходных процессах непрямого регулирования (например, при перестройке регулятора) лапласово изображение $w(z)$ координаты $\varphi(t)$ переходного процесса может быть представлено в виде

$$w(z) = w_0(z)/(1 + w_k(z)), \qquad (1)$$

где $w_0(z)$, $w_k(z)$ являются функциями, оригиналы которых могут быть иногда легко найдены.

Переписывая уравнение (1) в виде $w(z) = w_0(z) - w_k(z)\,w(z)$ и применяя теорему о свертке, автор получает для оригинала $\varphi(t)$ функции $w(z)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) - \int_0^t \varphi_k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

из которого

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Phi_n(t), \qquad (2)$$

$$\Phi_0(t) = \varphi_0(t), \quad \Phi_n(t) = \int_0^t \varphi_k(t-\tau)\,\Phi_{n-1}(\tau)\,d\tau, \quad (2)$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Примечания референта. 1) Автор необоснованно считает, что только из сходимости ряда (2) (без оценки $|w_k(z)| < 1$) следует возможность разложения функции (1) в ряд

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W_n(z), \quad W_0(z) = w_0(z),$$

$$W_n(z) = w_0(z)\,w_k^n(z), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и поэтому вопрос о существовании изображения $w(z)$ для найденной функции $\varphi(t)$ остается открытым. 2) Вместо Φ_n, W_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), введенных в реферате, автор пишет φ_n, w_n, что путается с φ_k, w_k. *М. К. Фаге*

См. также: 2616, 2636, 2638 — 2640, 2678 2687, 2759, 2772 Д, 2773 Д

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2717. Критерий в терминах собственных значений для двумерных вариационных задач. Хёльдер (Das Eigenwertkriterium der Variationsrechnung zweifacher Extremalintegrale. Hölder Ernst), Ber. Math.-Tagung, Berlin, 1953, 291—302 (нем.)

Доклад о достаточных условиях минимума в терминах собственных значений граничной задачи, связанной со второй вариацией в двумерных вариационных задачах. В § 1 приводятся исторические сведения о развитии вариационного исчисления в Берлине в XVIII—XIX вв. В §§ 2—5 дан обзор работ немецких авторов по теории задач с кратными интегралами за последние 75 лет (начиная с Вейерштрасса). В §§ 6—10 излагаются новые результаты по теории второй вариации (в терминах собственных значений), включая результаты самого автора. Библиография, 27 названий. *М. К. Керимов*

2718. Последовательные вариации и теорема Якоби для интеграла с подинтегральной функцией, зависящей от нескольких функций одной переменной. Бертолини (Le variazioni successive ed il teorema di Jacobi per un integrale dipendente da piu' funzioni di una sola variabile. Bertolini Fernando), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 8—22 (итал.)

Рассматривается вариационная задача:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))\,dx = \min, \qquad (1)$$

где $y(x) \equiv (y_1(x), \ldots, y_r(x))$, $y'(x) \equiv (y_1'(x), \ldots, y_r'(x))$; функция F определена и непрерывна вместе с частными производными до порядка $N+4$ ($N \geqslant 1$) в $(r+1)$-мерной связной области G переменных (x, y). Класс функций $y = y(x)$, непрерывных вместе с первыми производными на (x_1, x_2), графики которых лежат внутри G и соединяют две заданные точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ из G (класс допустимых кривых), обозначим через Γ. Через $E_0: y = u_0(x)$ обозначим экстремаль задачи (1) в классе кривых Γ. Предположим, что вдоль кривой E_0 удовлетворяется условие Лежандра в строгом смысле.

В реферируемой работе находится необходимое условие Якоби для задачи (1) в терминах вариаций высших порядков интеграла (1) в случае, когда x_1 и x_2 являются абсциссами сопряженных друг к другу точек экстремали E_0.

Сначала приводятся некоторые формулы, облегчающие вычисление последовательных вариаций интеграла (1). Так как x_1 и x_2 являются сопряженными друг к другу, то существует такое решение $u = u_1(x)$ системы уравнений Якоби, соответствующей экстре-

мали E_0, для которого $u_1(x_1)=0$, $u_1(x_2)=0$, но $u_1(x)\not\equiv 0$ на (x_1, x_2). Возьмем систему функций $u_k(x)$ $(k=2, 3, \ldots, N+2)$, непрерывных вместе с первыми производными на (x_1, x_2), для которых $u_k(x_1)=0$, $u_k(x_2)=0$, $u_k(x)\not\equiv 0$ на (x_1, x_2). Подставляем в (1) вместо $y(x)$ функции $\Sigma_0^n \varepsilon^k u_k(x)/k!$ $(n=1, \ldots, \ldots, N+2)$, принадлежащие классу Г, и введем обозначение

$$H_n(\varepsilon) \equiv J[\Sigma_0^n \varepsilon^k u_k(x)/k!] \quad (n=1, \ldots, N+2). \quad (2)$$

Последовательные производные (2) по ε являются вариациями интеграла (1).

Доказывается, что для того чтобы кривая E_0 реализовала минимум интеграла (1) в классе кривых Г, необходимо, чтобы первый не равный нулю элемент последовательности

$$H_1'''(0),\ H_2^{\mathrm{IV}}(0),\ \ldots,\ H_N^{(N+2)}(0) \quad (3)$$

был положителен и стоял на четном месте.

Далее дается геометрическое доказательство условия Якоби. Пусть

$$y=v_0(x, t),\ x_1\leqslant x\leqslant x_2,\ t_1<t<t_2 \quad (4)$$

— однопараметрическое семейство экстремалей, выходящих из точки P_1, содержащее в себе E_0 при $t=t_0$. Пусть семейство (4) имеет огибающую L с уравнениями

$$x=s(t),\ y=v_0[s(t), t],\ t_1<t<t_2, \quad (5)$$

удовлетворяющую условиям: 1) L касается с E_0 в точке P_2; 2) $s(t)$ непрерывна вместе с производной N-го порядка на (t_1, t_2); 3) $s(t)>x_1$, $v_0(x, t)$, $v_0'(x, t)$, $\partial v_0(x, t)/\partial t$, $\partial v_0'(x, t)/\partial t$ непрерывны. Тогда, для того чтобы E_0 реализовала минимум интеграла (1) в классе кривых Г, необходимо, чтобы первый не равный нулю элемент последовательности

$$s'(t_0),\ s''(t_0), \ldots, s^{(N)}(t_0) \quad (6)$$

был положителен и стоял на четном месте.

Если к приведенным выше требованиям 1) — 3) добавить еще 4), функция $v_0(x, t)$ вместе с производными $\partial^n v_0^{(m)}(x, t)/\partial t^n$ $(m+n=0, 1, \ldots, N+2)$, $\partial^{N+2} v_0'(x, t)/\partial t^{N+2}$ непрерывна; 5) $\partial v_0'(x_2, t_0)/\partial t\neq 0$, то E_0 удовлетворяющая необходимому условию, выраженному в терминах (3), удовлетворяет также и условию, выраженному в терминах (6).

Доказывается, что без выполнения условий 4) и 5) последнее утверждение не справедливо.

М. К. Керимов

2719. Уравнения Пфаффа и задача Больца. Фокнер (Pfaffian equations and the problem of Bolza. Faulkner Frank D.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, v. 2, Amsterdam, 1954, 100 (англ.)

Краткое сообщение о параллельном исследовании задачи Больца с разделенными условиями для концов (Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1950, 226—227) и уравнения в полных дифференциалах $P_i dx_i=0$.

М. К. Керимов

2720. Оценка числа критических точек непрерывного отображения многообразия на окружность. Эльсгольц Л. Э., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, 7, 34—38

Пусть M^n — дважды непрерывно дифференцируемое многообразие, f — дважды непрерывно дифференцируемое отображение M^n в окружность S^1. Так как f локально представляет числовую функцию на M^n, то имеет смысл понятие критической точки f; предполагается, что все критические точки f изолированы и невырождены. Число критических точек f оценивается снизу с помощью следующего приема. Пусть $M_1^{n-1}\subset M^n$ — некритическая поверхность уровня f (возможно, несвязная), M_2^{n-1} — изотопная M_1^{n-1} поверхность уровня, P^n — слой между M_1^{n-1} и M_2^{n-1}, не содержащий критических точек f. На ограниченном многообразии $Q^n=M^n/P^n$ можно рассматривать f как числовую функцию, принимающую наименьшее и наибольшее значения соответственно на M_1^{n-1} и M_2^{n-1}. К этой функции применяются обычные неравенства Морса, и типовые числа $m^i(M_j^{n-1})$ вычисляются с помощью теоремы о снятии цикла и закона двойственности для обших многообразий Л. С. Понтрягина. Гомологии рассматриваются по модулю два. Пусть m^i — число критических точек f типа i; $p^i(M^n)$, $p^i(M_1^{n-1})$ — числа Бетти соответственно M^n и M_1^{n-1}; $q^i(M_1^{n-1})$, $\overline{q}^i(M_1^{n-1})$ — наибольшие числа независимых на M_1^{n-1} циклов, гомологичных нулю соответственно на M^n и $M^n\setminus M_2^{n-1}$.

Доказываются следующие соотношения:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i p^i(M^n)=\sum_{i=0}^n (-1)^i m^i,$$

$$\sum_{i=0}^n m^i\geqslant \sum_{i=0}^n p^i(M^n)-\sum_{i=0}^{n-1} m^i(M_1^{n-1})-\sum_{i=1}^n m^i(M_2^{n-1}),$$

$$\sum_{i=0}^n m^i\geqslant \sum_{i=0}^n p^i(M^n)-2\sum_{i=0}^{n-1}\left[p^i(M_1^{n-1})-q^i(M_1^{n-1})\right]+2\sum_{i=0}^{n-1}\overline{q}^i(M_1^{n-1}).$$

Для сферы S^n и проективного пространства P^n $\sum_{i=0}^n m^i$ не меньше соответственно 2 и $n+1$.

(В последней строке стр. 37 ошибочно поставлено $q^i(M_1^{n-1})$ вместо $q^{n-i-1}(M_1^{n-1})$, а в первой строке стр. 38 — $\overline{q}^i(M_1^{n-1})$ вместо $q^{n-i-1}(M_1^{n-1})$ — $-[q^i(M_1^{n-1})-\overline{q}^i(M_1^{n-1})]$; тем не менее окончательная оценка справедлива. *Прим. реф.*).

Предположение вырожденности f, как отмечает автор, может быть снято. Оценивается также число геометрически различных критических точек. Доказательства приведены в конспективной форме.

А. И. Фет

2721. «Экстремальные длины» в пространстве, электрическое сопротивление и емкость. Херш («Longueurs extrémales» dans l'espace, résistance électrique et capacité. Hersch Joseph), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 16, 1639—1641 (франц.)

Переносится на трехмерный случай метод «экстремальных длин» Альфорса и Бёрлинга (Ahlfors

L. V., Beurling A., Acta Math., 1950, 83, 114). Пусть в области D задана неотрицательная действительная функция ρ (распределение). Для кривых c, поверхностей γ в области D и самой области D определяются функционалы

$$C_\rho(c) = \int_c \rho ds, \Gamma_\rho(\gamma) = \iint_\gamma \rho dS,$$

$$V_\rho = V_\rho(D) = \overline{\iiint_D} \rho^2 dV,$$

где $\int$ и $\overline{\int}$ обозначают соответственно нижний и верхний интегралы Дарбу. Для семейства кривых $\{c\}$ вводится модуль $M\{c\} = \inf V_\rho$, где inf берется по всем распределениям ρ, для которых $C_\rho(c) \geqslant 1$ $(c \in \{c\})$.

Для семейства поверхностей $\{\gamma\}$ вводится модуль $M\{\gamma\} = \inf V_\rho$, где inf берется по всем распределениям ρ, для которых $\Gamma_\rho(\gamma) \geqslant 1$ $(\gamma \in \{\gamma\})$. Пусть $\overline{D}$ гомеоморфна шару, и на границе D заданы две непересекающиеся жордановы области G_0, G_1 (электроды). Обозначим через u гармоническую функцию в D такую, что $u = 0$ на G_0, $u = 1$ на G_1, $\partial u / \partial n = 0$ на остальной части границы области D. Положим

$$e = \iint_{G_1} (\partial u / \partial n)\, dS.$$

Если D заполнена однородным проводником, то u — потенциал постоянного тока, текущего между электродами, а $1/e$ — сопротивление D.

Рассматривается семейство $\{c\}$ дуг Жордана, соединяющих G_0 с G_1 в D, и семейство $\{\gamma\}$, поверхностей, гомеоморфных кругу, с контуром на границе D, разделяющих G_0 и G_1. Для этих семейств доказывается теорема:

$$M\{\gamma\} = 1/e,$$

причем экстремальное распределение есть

$$\rho_{0\gamma} = (1/e)\,|\operatorname{grad} u|;\ M\{c\} = e,$$

причем экстремальное распределение есть $\rho_{0c} = |\operatorname{grad} u|$. Если D гомеоморфна шаровому слою, за G_0 и G_1 принимаются граничные поверхности слоя; рассматривается семейство $\{c\}$ дуг, соединяющих G_0 с G_1 в D, и семейство $\{\gamma\}$ замкнутых поверхностей рода нуль, отделяющих G_0 от G_1. В этом случае также $1/M\{c\} = M\{\gamma\} = 1/e$, причем $1/e$ может быть интерпретировано как сопротивление проводника D, а e — как емкость конденсатора D.

С помощью этих результатов можно оценивать сверху и снизу сопротивление и емкость, строя допустимые распределения или применяя общие неравенства для модулей (РЖМат, 1954, 3677).

Указываются возможные обобщения. Доказательства кратко намечены; не оговорены условия, которые необходимо наложить на область D, кривые c и поверхности γ для справедливости результатов работы (например, условия существования потенциала u). *А. И. Фет*

См. также: 2608, 2681, 2694, 2699

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

2722. Функциональное уравнение автодистрибутивности. Хоссу (On the functional equation of autodistributivity. Hosszu M.), Publs mathematicae, 1953, 3, № 1—2, 83—86 (англ.)

Доказывается, что общее решение системы функциональных уравнений

$$M[M(x, y), z] = M[M(x, z), M(y, z)],$$
$$M[z, M(x, y)] = M[M(z, x), M(z, y)],$$

где $M(x, y)$ — неизвестная, строго монотонная и дифференцируемая по обеим переменным функция, имеет вид:

$$M(x, y) = f^{-1}(pf(x) + qf(y)),\ p + q = 1,$$

где $f(t)$ — произвольная, строго монотонная дифференцируемая функция. Этот результат обобщает результаты Рылл-Нардзевского и Апела (РЖМат, 1954, 4446). *П. И. Романовский*

2723. Алгорифм функции Дирака. Элементарное обоснование и применение к классическим уравнениям. Кастольди (L'algoritmo della funzione di Dirac. Giustificazione elementare e applicazioni ad equazioni classiche. Castoldi Luigi), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur, 1954, 16, № 1, 18—25 (итал).

Интеграл, содержащий δ-функцию Дирака, сопоставляется с интегралом Римана — Стилтьеса, и с его помощью показывается, что если с первым оперировать формально, с соблюдением привычных правил для обыкновенных интегралов, то получаются верные результаты. Автор сначала рассматривает одномерный случай, а затем — трехмерный. Выводится несколько известных соотношений из области математической физики (формула Кирхгофа и др.).

Статья имеет методическую направленность. Самая идея обоснования операций, производимых с функцией Дирака, путем использования интеграла Стилтьеса — не нова (см. например, Neumann I. v., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1927, № 1, 1—57). *Г. М. Фихтенгольц*

2724. Две теоремы о двойственных себе функциях и одно новое преобразование. Бхатнагар (Two theorems on self reciprocal functions and a new transform. Bhatnagar K. P.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, 45, № 3, 109—112 (англ.)

Рассматривается интегральное преобразование с ядром вида

$$\tilde{\omega}_{\mu,\nu}(xz) = (xz)^{1/2} \int_0^\infty [J_\nu(t) J_\mu(xz/t)/t]\, dt, \qquad (1)$$

обобщающее известное преобразование Ганкеля. Функция принадлежит классу $R_{\mu,\nu}$, если она двойственна себе в преобразовании с ядром (1). Функция

принадлежит классу $A(\omega, a)$, $0 < \omega \leqslant \pi$, $a < 1/2$, если: a) она аналитически зависит от $x = re^{i\theta}$, регулярна в угле A, где $r > 0$, $|\theta| < \omega$; b) для любого положительного δ равномерно в произвольном угле $|\theta| \leqslant \omega - \eta < \omega$ имеет порядок $O[|x|^{-a-\delta}]$ при малых x и $O[|x|^{a-1+\delta}]$ при больших x.

Доказывается теорема: Для того чтобы функция $f(x)$ класса $A(\omega, a)$ принадлежала классу $R_{\mu,\nu}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^s \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} + \frac{s}{2}\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{2} + \frac{s}{2}\right) x^{-s} \psi(s)\, ds,$$

где $\psi(s) \equiv \psi(1-s)$, $\psi(s)$ регулярна в области $a < \sigma < 1-a$ и равномерно в произвольной полоске $a < \sigma < 1-a$ имеет порядок $O[\exp(\eta - \omega + \pi/2)]$ для любого $\eta > 0$, причем c есть произвольное значение σ из этой полоски.

Эти результаты обобщают некоторые теоремы Гупта. *В. Д. Купрадзе*

2725. Относительные максимумы и минимумы функций двух или большего числа переменных. Хендлер (Relative maxima and minima of functions of two or more variables. Hendler A. S.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 6, 418—420 (англ.)

Дается простой вывод достаточных условий существования локальных экстремумов для функций многих переменных. Вывод основан на рассмотрении достаточных условий существования экстремума функции $F(s) = f(a + s\cos\alpha, b + s\sin\alpha)$. Для функций более чем двух переменных непосредственно выводятся достаточные условия, получаемые обычно из критерия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Новых результатов статья не содержит.

Э. И. Арнольд

2726. Об одном определенном интеграле. Сенгупта (On a certain definite integral. Sengupta H. M.), Math. Student, 1952, **20**, 122—123 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

В этой заметке автор вычисляет $\int_{-1}^{+1} [P_m(x)]^6\, dx$, где P_m — полином Лежандра, и приводит некоторые родственные результаты. *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs, 1953, 14, № 11, 1084.

2727. Об интегральном приближении Маресшаля. Сюй Лн-чжи (關於馬氏積分逼近法 / 徐利治), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **3**, № 2, 148—153 (кит.; резюме англ.)

В первой части работы доказывается следующая теорема: Пусть $G(x) \in L(a, b)$ и $F(x, X, Y)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$, $|X| \leqslant 1$, $|Y| \leqslant 1$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b F(x, \cos\lambda x, \sin\lambda x)\, G(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^b F(x, \cos\varphi, \sin\varphi)\, G(x)\, dx\, d\varphi.$$

Известная теорема Римана — Лебега соответствует случаю $F = \cos\varphi$ или $\sin\varphi$. В частности, если

$$F\, d\varphi = F(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= F\left[\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right] \frac{dz}{iz} = S(z)\, dz,$$

где $S(z)$ аналитична внутри и на границе круга $|z| = 1$, исключая конечное число особых точек внутри круга $|z| < 1$, то теорема о вычетах дает

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b F(\cos\lambda x, \sin\lambda x)\, G(x)\, dx = i\Sigma R_k \cdot \int_a^b G(x)\, dx,$$

где ΣR_k есть сумма вычетов $S(z)$ внутри круга $|z| = 1$.

Во второй части работы при достаточно общих условиях доказывается равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_a^b F[x, g_\lambda(x)]\, h_\lambda(x)\, dx = \iint_{(D)} F(x, y)\, dx\, dy,$$

где

$$g_\lambda(x) = \cos^2\lambda x \cdot f_1(x) + \sin^2\lambda x \cdot f_2(x),\ h_\lambda(x) =$$

$$= [f_1(x) - f_2(x)]\,|\sin 2\lambda x|,\ f_1(x) \geqslant f_2(x)\ (a \leqslant x \leqslant b).$$

Б. М. Левитан

2728. Элементы математического анализа. Ч. 1,2. Скорца-Драгони (Elementi di analisi matematica. Scorza-Dragoni Giuseppe. Parte 1, XXIII + 554 p. 3300L; parte 2, XXIX + + 635 p., 4000L, Cedam, 1953) (итал.)

Учебное пособие (для первых двух курсов университетов) в двух томах, изданное литографическим способом. Пособие охватывает обширный круг вопросов по различным областям математики, часть которых изложена конспективно. Содержание и расположение материала видно из следующего перечня глав, приводимых в нужных случаях с краткой их характеристикой.

Содержание тома 1.

Гл. 1. Действительные и комплексные числа. Дается подробная теория действительных и комплексных чисел. Гл. 2. Матрицы и детерминанты. Гл. 3. Линейная зависимость и независимость. Системы линейных уравнений. Гл. 4. Множества действительных и комплексных чисел. Гл. 5. Числовые последовательности и их пределы (последовательности действительных и комплексных чисел). Гл. 6. Числовые ряды. Дана подробная теория числовых рядов (действительных и комплексных), включая и двойные ряды. Гл. 7. Действительные функции одной действительной переменной и их пределы. Гл. 8. Непрерывность и дифференцируемость функций одной действительной переменной (кратко рассматриваются также комплексные функции действительной переменной). Гл. 9. Элементарные функции. Гл. 10. Основные теоремы о производной. Приложения. В качестве приложения дан метод Ньютона — Рафсона для приближенного решения уравнений (автор называет его методом Ньютона—Фурье). Гл. 11. Бесконечно малые и бесконечно большие. Дифференциалы. Гл. 12. Понятие интеграла от действительной непрерывной функции одной действительной переменной. Гл. 13. Последовательности и ряды функций (включая тригонометрические ряды). Гл. 14. Точечные множества в действительных чис-

ловых пространствах. Гл. 15. Действительные функции многих действительных переменных. Пределы. Непрерывность. Гл. 16. Действительные функции многих действительных переменных. Производная. Дифференциал. Гл. 17. Некоторые сведения о функциях комплексного переменного. Элементарные трансцендентные функции комплексного переменного. Гл. 18. Некоторые сведения по теории многочленов от одного переменного.

Содержание тома 2.

Гл. 1. Применение дифференциального исчисления к функциям многих переменных. Доказывается теорема существования и единственности неявной функции для случая одного уравнения $f(x, y) = 0$ и для систем уравнений; рассмотрены функции от двух комплексных переменных, их частные производные, теорема о неявных функциях, теория функциональных определителей, линейная зависимость функций многих переменных, замена переменных, максимумы и т. п. Гл. 2. Начальные сведения о кривой. Гл. 3. Начальные сведения о поверхностях и многообразиях. Гл. 4. Длина кривой. Криволинейный интеграл. Гл. 5. Линейные дифференциальные формы и их интегрирование. Здесь подробно излагается теория интегрирования дифференциальных форм видов $L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy$ и $L(x,y,z)\,dx + M(x,y,z)\,dy + N(x,y,z)\,dz$. Материал в главах 2, 3, 4, 5 изложен весьма обстоятельно (значительно полнее, чем в обычных курсах анализа). Гл. 6. Об определенном и неопределенном интегралах в комплексной области. Гл. 7. Неопределенный интеграл в случае рациональной подинтегральной функции. Приложения. Гл. 8. Вычисление определенных интегралов. В частности даны несколько квадратурных формул (формулу Кавальери — Симпсона автор называет формулой Кавальери — Торричелли), изложены приемы вычисления некоторых замечательных интегралов Дирихле, Френеля и др.). В конце главы даны некоторые сведения по комбинаторике. Гл. 9. Интегралы, зависящие от параметра. В этой же главе излагается (на 24 страницах) теория преобразования Лапласа. Гл. 10. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Гл. 11. Дифференциальные уравнения высших порядков. Гл. 12. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Гл. 13. О некоторых типах дифференциальных уравнений в частных производных. Гл. 14. Квадрируемые области. Кратные интегралы. Гл. 15. О замене переменных под знаком двойного интеграла. Приложения. В качестве приложений приведены некоторые дополнительные вопросы теории преобразования Лапласа. Гл. 16. Ориентированные плоскости. Простые ориентированные плоские полигоны и полигоноиды. Здесь речь идет о некоторых вопросах, связанных с ориентированными углами, трсугольниками, полигонами и полигоноидами (выпуклыми полигонами). Материал этой главы в обычных курсах анализа не встречается. Гл. 17. Двойные интегралы, распространенные на простые, ориентированные плоские полигоноиды. Гл. 18. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы. Гл. 19. Тройные интегралы.

Имеется дополнение, посвященное многочленам от многих переменных, решению уравнений третьего и четвертого порядков, теории алгебраических уравнений. Книга в целом написана под сильным влиянием теории функций действительного переменного. *М. К. Керимов*

2729 Б. **Обратные тригонометрические функции. Новоселов С. И.** (Пособие для учителей), 143 стр., Тбилиси, Изд-во Науч. исслед. ин-та пед. н. М-ва просвещ. ГрузССР, 1953, 2 р. 85 к.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2730. **Одно обобщение квазимонотонных рядов. Клуни** (An extension of quasi-monotone series. Clunie James), Math. Student, 1952, **20**, 107—112 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть Σa_n — ряд с положительными членами, для которого

$$a_{n+1} \leqslant a_n [1 + \varphi(n)/n]. \qquad (1)$$

Если последовательность $\varphi(n)$ ограничена, то ряд Σa_n является квазимонотонным. Сас (Szász O., Amer. J. Math., 1948, **70**, 203—206) и Шах (Shah, Math. Student, 1948, **15**, 19—24) распространили многочисленные теоремы о рядах с монотонно убывающими членами на квазимонотонные ряды. Например, если $\Sigma a_n < \infty$ и Σa_n квазимонотонный, то $na_n \to 0$. В данной статье показывается, что если $\varphi(n) \uparrow \infty$ при $n \to \infty$, то теоремы Саса и Шаха не могут быть распространены с класса квазимонотонных рядов на класс рядов, удовлетворяющих (1).

R. P. Agnew

Перевод из Math. Revs, 1953, 14, № 11, 1078.

2731. **Периодические рекуррентные ряды. Гнанадосс** (Periodically recurring series. Gnanadoss A. A.), Math. Student, 1952, **20**, 119—121 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Доказывается следующая теорема: Если $u(n+3) = a(n)\,u(n+2) + b(n)\,u(n+1) + c(n)\,u(n)$ и для всех натуральных значений n $a(n+k) = a(n)$, $b(n+k) = b(n)$, $c(n+k) = c(n)$, где k — постоянное натуральное число, то: A) радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u(n)\,x^n$ не равен нулю, B) производящая функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)\,x^n$ рациональна; C) имеется шкала связи типа $1 - px^k - qx^{2k} - rx^{3k}$, где p, q, r — постоянные. *T. Fort*

Перевод из Math. Revs, 1953, 14, № 11, 1079.

2732. **Радиусы сходимости некоторых степенных рядов, применяемых для решения трансцендентных уравнений. Локс** (Die Konvergenzradien einiger zur Lösung transzendenter Gleichungen verwendeter Potenzreihen. Lochs Gustav), Monatsh. Math., 1954, 58, № 2, 118—122 (нем.)

Доказывается, что радиус сходимости ряда

$$u = \sum_{0}^{\infty} a_n t^n,$$

обращающего функцию $t = \exp u \operatorname{tg}(u/2)$, равен $\exp(-\pi/2)$. Для $u_k = u(t_k)$,

$$t_k = (-1)^{k-1} \exp[-(2k-1)\pi/2],$$

$$z_k = u_k + k\pi - \pi/2$$

($k = 1, 2, \ldots$) суть корни уравнения $\operatorname{ch} z \cos z = -1$. Доказательство основывается на рассмотрении структуры римановой поверхности функции $t(u)$. Методом перевала выводится асимптотическое выражение для a_n. Отмечается, что аналогично можно найти радиусы сходимости, именно $\pi/2$ и $1+\pi/2$ для рядов, обращающих соответственно функции $(u+\operatorname{ctg} u)^{-1}$ и $(2u+\operatorname{ctg} u)^{-1}$.

Примечание референта. Формулы (4) и (6) для z_k и t_k ошибочны, так как они не согласуются с уравнением (3) и функцией (5), и должны быть заменены приведенными в реферате.

В. И. Левин

2733. Об одном линейном преобразовании последовательностей и рядов. Лотоцкий А. В., Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, **4**, 61—91

Пусть

$$p_n(x) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) = c_1^{(n)} x + c_2^{(n)} x^2 + \ldots + c_n^{(n)} x^n \quad (n \geqslant 1)$$

и для заданной последовательности s_n

$$\sigma_n = (c_1^{(n)} s_1 + c_2^{(n)} s_2 + \ldots + c_n^{(n)} s_n)/n!, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Последовательность $\{s_n\}$ p-суммируема к s, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = s$.

Доказывается, что:

1. p-метод регулярен.

2. Всякая суммируемая методом Эйлера $(E, 1)$ последовательность является p-суммируемой к тому же числу.

3. Для p-суммируемости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо выполнение условия $|a_n| = O((n+1)!/(\lg 2)^n)$. Существуют p-суммируемые ряды, для которых a_n имеет одинаковый порядок роста с $n!/(\ln 2)^n$.

4. Из суммируемости p-методом последовательности $s_0, s_1, s_2, \ldots$ следует суммируемость p-методом к тому же числу последовательности $a, s_0, s_1, s_2, \ldots$ для любого a.

5. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Бореля к сумме s, то ряд

$$\frac{c_1^{(1)} a_1}{2!} + \frac{c_1^{(2)} a_1 + c_2^{(2)} a_2}{3!} + \ldots,$$

представляющий собой его p-преобразование, суммируем к s методом Абеля.

Дается пример p-суммируемой последовательности $s_1, s_2, s_3, \ldots$, для которой последовательность $s_2, s_3, s_4, \ldots$ не является p-суммируемой. Приводятся также примеры p-суммируемых рядов, которые не суммируемы методами Бореля, Абеля и Эйлера.

М. Д. Калашников

2734. О староиндусском вычислении числа π и его общем значении. Гофман (Über eine altindische Berechnung von π und ihre allgemeine Bedeutung. Hofmann Jos. E.), Math.-phys. Semesterber., 1953, **3**, № 3/4, 193—206 (нем.)

По утверждению автора, индийские математики XV в. уже знали ряд Лейбница для вычисления π:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad (1)$$

и заметили его непригодность для практических вычислений. Они улучшили сходимость ряда (1) путем соответствующих изменений. При этом применялось три способа.

В первом способе совокупность членов, стоящих за членом $\pm 1/(2n-1)$ в частной сумме $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k/(2k+1)$, заменялась членом $T_n = (-1)^n/4n$.

Во втором способе к S_n добавлялся член $T_n = (-1)^n n/(4n^2+1)$.

В третьем $T_n = (-1)^n (n^2+1)/n(4n^2+5)$.

На примерах автор показывает, что первый способ может быть с успехом применен к вычислению суммы числовых и степенных рядов, функции e^x, к извлечению квадратных корней, суммированию рядов с дробями, обратными целым числам или их квадратам.

В. А. Голубев

2735. Преобразования Абеля и Рисса ряда, имеющего ограниченные частные суммы. Агнью (Abel and Riesz transforms of series having bounded partial sums. Agnew Ralph Palmer), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 1, 47—72 (англ.)

Пусть

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k,$$

$$R^{(r)}(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^r u_k$$

суть преобразования Абеля и Рисса ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad (1)$$

с комплексными членами u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и ограниченными частными суммами $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; R — радиус наименьшего круга, содержащего все частичные пределы последовательности $\{s_n\}$. В статье изучается наименьшая положительная константа H_r, обладающая следующим свойством: существуют функции $t(\alpha)$ и $n(\alpha)$, определенные при $\alpha > 0$ такие, что $0 < t(\alpha) < 1$, $n(\alpha)$ — целое положительное число и $t(\alpha) \to 1$, $n(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to \infty$, причем имеет место неравенство

$$\limsup_{\alpha\to\infty} |A(t) - R^r(n)| \leqslant H_r \cdot R$$

для каждого ряда (1), имеющего ограниченные частные суммы. Легко доказывается, что $H_0 = 2$. Пусть далее $r > 0$ и $q > 0$

$$G_r(\lambda) = e^{-\lambda} + \int_0^1 | \lambda e^{-\lambda x} - r(1-x)^{r-1} | dx,$$

$$0 < \lambda < \infty, \qquad (2)$$

$$n(t) = (q + o(1))/(1-t), \qquad (3)$$

где $0 < t < 1$, $o(1) \to 0$ при $t \to 1$,

$$t_n = 1 - (q + o(1))/n, \qquad (4)$$

где $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказывается:

1) $\limsup_{t \to 1} | A(t) - R^{(r)}(n(t)) | \leqslant G_r(q) \cdot R$, (5)

если $n(t)$ определяется по формуле (3).

2) $\limsup_{n \to \infty} | A(t_n) - R^{(r)}(n) | \leqslant G_r(q) \cdot R$, (6)

если t_n определяется по формуле (4).

3) Константа $G_r(q)$ есть наилучшая константа в том смысле, что если n и t (t_n и n) связаны условием (3) ((4)), то можно указать ряд (1), для которого в неравенстве (5) ((6)) имеем точное равенство.

4) Функция $G_r(\lambda)$, определяемая равенством (2), удовлетворяет в интервале $(0, +\infty)$ условиям:

$$0 < G_r(\lambda) < 2, \quad \lim_{\lambda \to 0} G_r(\lambda) = 2, \quad \lim_{\lambda \to \infty} G_r(\lambda) = 2$$

и принимает в этом интервале свое наименьшее значение только в одной точке q_r, $0 < q_r < \infty$.

5) $G_r(q_r) = H_r$.

Кроме того, указаны способы для вычисления приближенных значений $G_r(\lambda)$; вычислены приближенные значения $G_1(\lambda)$, $G_{1/2}(\lambda)$ и $G_2(\lambda)$ для некоторых частных значений λ, а также вычислены приближенные значения для q_r и $G_r(q_r) = H_r$ для ряда частных значений r. Например, $q_{1/2} \approx \approx 1{,}395584718$. $H_{1/2} = G_{1/2}(q_{1/2}) \approx 0{,}914313331$. Для больших значений r и $t = 1 - (r + 0{,}34856746)/n$ получена оценка

$$| A(t) - R^{(r)}(n) | \leqslant [0{,}45910551 \cdot r^{-1} + O(r^{-2})] R.$$

Н. А. Давыдов

2736. Гармонические функции и тауберовы теоремы. I. Аллен, Керр (Harmonic functions and tauberian theorems (I). Allen A. C., Kerr E.), J. London Math. Soc., 1954, 29, ч. 1, № 113, 104—115 (англ.)

Как известно, всякая функция $H(\xi, \eta)$, положительная и гармоническая в полуплоскости $\eta > 0$, допускает представление:

$$H(\xi, \eta) = D\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta dg(t)}{\eta^2 + (\xi - t)^2}, \qquad (1)$$

где $D \geqslant 0$, $g(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — неубывающая функция, причем $g(0) = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} dg(t) < \infty$. Лумис (Loomis, Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 53, 239—250) доказал для функций вида (1) следующее предложение, являющееся обращением классической теоремы Фату: если $H(0, \eta) \to A$ при $\eta \to 0+$, то $g(x) - g(-x) \sim 2Ax$ при $x \to 0$. Верблунский (Verblunsky, J. London Math. Soc., 1947, 22, 210—216) пытался обобщить последний результат и доказать, что для функций вида (1) из

$$\lim_{r \to 0+} H(r\cos\theta, r\sin\theta) = A \qquad (2)$$

следует $(\pi - \theta) g(x) - \theta g(-x) \sim A\pi x$ $(x \to 0+)$ при каждом фиксированном θ, $0 < \theta < \pi/2$; однако доказательство Верблунского содержит ошибку. Авторы исправляют предложение Верблунского и показывают, что из (2) следует $g(x) + f(x) \sim Ax\pi/(\pi - \theta)$ $(x \to 0+)$, где $f(x)$ — неубывающая функция, единственным образом определяемая соотношениями

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta df(t)}{\eta^2 + (\xi - t)^2} = \int_0^{\infty} \frac{\eta d\{-g(-t)\}}{\eta^2 + (\xi + t)^2}, \quad f(0) = 0$$

$$(\xi = r\cos\theta, \ \eta = r\sin\theta, \ 0 < r < \infty).$$

Далее с помощью последней теоремы строятся примеры, показывающие, что предложение Верблунского и обратное ему неверны при всяком θ $(0 < \theta < \pi/2)$.

Б. И. Коренблюм

2737. Весьма общая форма теоремы Литтльвуда Коревар (A very general form of Littlewood's theorem. Korevaar Jacob), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 1, 36—45 (англ.)

Автор дает полное доказательство следующей леммы Фрейда (Freud G., Acta math. Acad. sci. hung, 1952, 2, 299—303):

1. Пусть $-1 < a < 1$ и $h(x) = 0$ при $-1 \leqslant x < a$ и $= 1$ при $a \leqslant x \leqslant 1$.

Тогда существуют постоянные H_1 и H_2, зависящие только от a, и полиномы степени p

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} A_{pk} x^k, \quad s_p(x) = \sum_{k=0}^{p} a_{pk} x^k, \quad p = 1, 2, \ldots$$

такие, что

1) $s_p(x) \leqslant h(x) \leqslant S_p(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$,

2) $\int_{-1}^{1} \{S_p(x) - s_p(x)\} dx < H_1/p$,

3) $| A_{pk} | < H_2^p$, $| a_{pk} | < H_2^p$, $k = 0, 1, 2, \ldots, p$.

Из леммы Фрейда выводится аналогичная лемма для бесконечного промежутка $[0, \infty)$. Затем автор выводит следующую тауберову теорему:

Пусть $L(t)$ определена для $t>0$, положительна, непрерывна и медленно колеблется, т. е. для любого $c>0$

$$\lim_{t\to 0}[L(ct)/L(t)]=1;$$

$\varphi(t)=t^{\alpha}L(t)$, где α — действительное число. Пусть далее $\omega(u)$ положительна, ограничена при $u>0$ и $\downarrow 0$ при $u\downarrow 0$.

Предположим, наконец, что ряд $f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-nu}$ сходится для всех $u>0$.

Теорема A. Если $a_n>-\varphi(n)$, $n=1,2,\dots$, и $|f(u)-s|<\omega(u)$, $(u>0)$, то $|s_n-s|\leqslant\rho(n)$, $n=0,1,\dots$, где $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$, $n=0,1,2,\dots$,

а $\rho(0)=K_1$,

$\rho(n)=\min\limits_{p\geqslant k_0}\{K_2 n\varphi(n)p^{-1}+K_3^p\omega(p/n)\}$, $n=1,2,\dots$,

при $\liminf\limits_{u\downarrow 0}u\log\omega(u)>-\infty$

и $\rho(n)\equiv 0$,

при $\liminf\limits_{u\downarrow 0}u\log\omega(u)=-\infty$.

Постоянные K_i, $i=0,1,2,3$, зависят только от функций φ и ω, причем $K_3>1$.

Эту теорему автор получает из аналогичной интегральной теоремы. Кроме того, автор с помощью примеров устанавливает, что его оценки для $|s_n-s|$ и $\rho(n)$ являются наилучшими из возможных. *М. Д. Калашников*

2738. Еще одна числовая тауберова теорема для степенных рядов. Коревар (Another numerical Tauberian theorem for power series. Korevaar Jacob), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A 57**, № 1, 46—56 (англ.)

Обозначения см. реф. 2737. Обобщая лемму Фрейда, автор доказывает ряд лемм, из которых мы приведем одну:

1. Пусть $H(x)$ — функция ограниченной вариации на $[-1,1]$,

$$M=\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}|H(x)|,\quad V=\operatorname*{var}_{-1\leqslant x\leqslant 1}H(x),$$

тогда для $p=1,2,\dots$ существуют полиномы $X_p(x)=\sum_{k=0}^{p}B_{pk}x^k$ степени $\leqslant p$, удовлетворяющие неравенствам

$$H(x)\leqslant X_p(x)\ (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

$$\int_{-1}^{1}\{X_p(x)-H(x)\}dx<H_1V/p,$$

$$|B_{p0}|<M+H_2^pV,\ |B_{pk}|<H_2^pV,\ k=1,2,\dots,p,$$

где H_1 и H_2 — абсолютные постоянные. Если, кроме того, существует интервал $1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1$, на котором $H(x)$ постоянна, то можно выбрать постоянные, H_1 и H_2, число $H_3(\varepsilon)$ и последовательность $\{X_p(x)\}$ так, чтобы

$$|X_p^{(k)}(1)|<H_3^k p^{k-1}V,\ k=1,2,\dots,p.$$

Из этих лемм автор выводит следующие теоремы с тауберовыми оценками:

Теорема 1. Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ — аналитическая при $|x|<1$ и при $x=1$, причем $a_n\geqslant -\varphi(n)$, $n=1,2,\dots$, тогда $|s_n-f(1)|<C\varphi(n)$, $n=1,2,\dots$, где $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$.

Теорема 2. Пусть $F(u)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-nu}$ сходится для $u>0$ и пусть $G(u)$ — аналитическая в точке $u=0$, причем на некотором интервале $0<u<\delta$ $|F(u)-G(u)|\leqslant\omega(u)$, где $\omega(u)\downarrow 0$ при $u\downarrow 0$. Если $a^n\geqslant-\varphi(n)$, $n=1,2,\dots$, то существуют постоянные K_i, $i=1,2,3,4,5$ $(K_4>1)$ такие, что $|s_n-G(0)|\leqslant\rho(n)$, $(n\geqslant k_1)$, где

$$\rho(n)=\min_{p\geqslant k_2}\{K_3 n\varphi(n)p^{-1}+K_4^p\omega(p/n)\}$$

при $\liminf\limits_{u\downarrow 0}u\log\omega(u)>-\infty$

и $F(u)\equiv G(u)$, $\rho(n)=K_5\varphi(n)$

при $\liminf\limits_{u\downarrow 0}u\log\omega(u)=-\infty$.

Эти теоремы автор получает из соответствующих теорем в интегральной форме. *М. Д. Калашников*

2739. О чезаровской суммируемости одного класса функций. Падмавалли (On the Cesáro summability of a class of functions. Padmavally K.), J. Indian Math. Soc., 1953, **17**, № 4, 151—158 (англ.)

Пусть $g(x)$ и $a(x)$ при $x\geqslant 0$ имеют производные k-го порядка, интегрируемые на любом конечном интервале. Тогда, если $g(x)=O(1)$ и $a^{(k)}(x)=o(1)$ $(x\to\infty)$, то функция $g^{(k)}(x)a(x)$ при $x\to\infty$ суммируется к нулю методом Чезаро k-го порядка (определение метода (C,k) для интегралов см. Харди Г., Расходящиеся ряды, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1951, стр. 142 и след.).

Если выполняются условия $\int_0^x g(t)\,dt=O(1)$, $a^{(k)}(x)=o(1)$, при $x\to\infty$, то $\int_0^x g^{(k)}(t)\,a(t)dt-(-1)^k\int_0^x g(t)\,a^{(k)}(t)\,dt$ при $x\to\infty$ суммируется методом (C,k) к значению $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i+1}g^{(k-1-r)}(0)\,a^{(i)}(0)$.

Приводятся соответствующие аналоги этих предложений для последовательностей.

Некоторые частные случаи были ранее рассмотрены в работе Раджагопала (Rajagopal C. T., J. Indian Math. Soc., 1947, **11**, 22—27). *А. Ф. Тиман*

2740. О суммировании двойных рядов. Огиевецкий И. И., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 4, 713—716

Доказаны теоремы:

1. Если последовательность $\{s_{mn}\}$ суммируется методом $(C,\alpha+\gamma,\beta+\delta)$, $(\alpha,\beta)>-1$, $(\gamma,\delta)>0$, к s и последовательность $\{\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\}$ ограничена, то последовательность $\{\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\}$ суммируется методом (C,γ,δ) к s.

2. Если последовательность $\{\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\}$, $(\alpha,\beta)>-1$, ограничена и суммируется методом (C,γ,δ), $(\gamma,\delta)>0$, к s, то последовательность $\{s_{mn}\}$ суммируется методом $(C,\alpha+\gamma,\beta+\delta)$ к s.

3. Если последовательность $\{\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\}$, $(\alpha,\beta)>-1$, ограничена, то последовательность $\{\sigma_{mn}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}\}$, $(\gamma,\delta)>0$, медленно колеблется.

4. Если двойной ряд $\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}$ суммируется методом Абеля к s и последовательность $\{\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}\}$, $(\alpha, \beta) > -1$, ограничена и медленно колеблется, то данный ряд суммируется методом (C, α, β) к s.

В работе имеются опечатки. *В. Г. Челидзе*

2741. О совместности некоторых методов суммирования. А г р а н о в и ч М. С., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, 7, 169—194

Две матрицы называются вполне совместными, если они не могут суммировать одну и ту же последовательность к различным значениям (конечным или равным $\pm\infty$). Две матрицы называются вполне эквивалентными, если всякая последовательность, суммируемая одной из этих матриц к некоторому значению (конечному или равному $\pm\infty$), суммируется и другой матрицей к тому же значению. Обозначим через $\{B_n\}$ и $\{C_n\}$ последовательности, в которые преобразуется матрицами B и C какая-либо последовательность $\{S_n\}$. Матрицы B и C называются сильно эквивалентными, если существует такое целое число r, что, какова бы ни была $\{S_n\}$, при всех n, начиная с некоторого, $B_n = t_n C_{n+r} + \varepsilon_n$, где $t_n \to 1$, $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Пусть матрица A преобразует последовательности $\{S_n\}$ и $\{S_{n+1}\}$ соответственно в $\{A_n\}$ и $\{A_n'\}$. Матрица A называется вполне транслирующей, если всегда $\{A_n\}$ и $\{A_n'\}$ либо сходятся к одному и тому же пределу (конечному или равному $\pm\infty$), либо $\{A_n\}$ и $\{A_n'\}$ обе не имеют пределов (ни конечных, ни равных $\pm\infty$). Матрица A называется сильно транслирующей, если существует такое целое число r, что при любой $\{S_n\}$ для всех n, начиная с некоторого, $A_n = t_n A_{n+r}' + \varepsilon_n$, где $t_n \to 1$, $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Матрица называется вполне регулярной, если каждая последовательность, сходящаяся к некоторой величине (конечной или равной $\pm\infty$), суммируется этой матрицей к той же величине.

Получены следующие основные результаты:

1. Две нормальные матрицы могут быть только одновременно вполне эквивалентными и сильно эквивалентными.

2. Нормальные матрицы (b_{nk}) и (c_{nk}) $(n,\ k = 0,1,\ldots)$ вполне эквивалентны тогда и только тогда, если выполняются условия: а) существует такой номер $\mu \geqslant 0$, что $b_{nk} = t_n c_{nk}$ $(n \geqslant k \geqslant \mu)$, где $t_n \to 1$ при $n \to \infty$; б) если указанное $\mu > 0$, то $\lim_{n\to\infty}(b_{nk} - t_n c_{nk}) = 0$ $(k = 0,1,\ldots,\mu-1)$.

3. Нормальная матрица может быть только одновременно вполне транслирующей и сильно транслирующей.

4. Нормальная матрица (a_{nk}) является вполне транслирующей тогда и только тогда, если выполняются условия: в) существует такой номер $\mu > 0$, что $a_{nk} = t_n a_{n-1,\,k-1}$ $(n \geqslant k \geqslant \mu - 1)$, где $t_n \to 1$ при $n \to \infty$; г) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, \mu - 1)$.

5. Всякая нормальная вполне транслирующая матрица сильно эквивалентна некоторой D-матрице (D-матрицей автор называет матрицу, не обязательно нормальную, которая удовлетворяет условиям в) и г) при $\mu = 1$).

6. Регулярные нормальные вполне транслирующие матрицы совместны друг с другом.

7. Вполне регулярные нормальные вполне транслирующие матрицы вполне совместны друг с другом.

На примерах показано, что существуют несовместные вполне регулярные нормальные транслирующие матрицы и что существуют регулярные нормальные вполне транслирующие матрицы, которые не являются вполне совместными.

В. М. Даревский

2742. О совместности некоторых методов суммирования. А г р а н о в и ч М. С., Успехи матем. наук., 1954, 9, № 3 (61), 242

Резюме доклада на заседании Московского математического общества с изложением некоторых результатов, опубликованных в Ученых записках МГУ (см. реф. 2741), и новых результатов автора. *В. М. Даревский*

2743. Аппроксимация в полях методов суммирования. Ц е л л е р (Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren. Z e l l e r K.), Arch. Math., 1953, 4, № 5/6, 425—431 (нем.)

Пусть $x = E(y)$ регулярна в круге $|y| < \sigma$ и отображает этот круг на некоторую односвязную область G; $E(0) = 0$. Положим для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ a(E(y)) = b(y) = \sum_{n-0}^{\infty} b_n y^n.$$

Ряд (1) суммируем методом Эйлера — Кнопа, если сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. При $E(y) = y/(q+1-qy)$ получаем метод Эйлера E_q.

Пусть $\mathfrak{E}$ — множество всех последовательностей $a = \{a_k\}$, для которых ряд (1) суммируем методом Эйлера — Кнопа. Если определить норму $\|a\|$ как $\sup_{m=0,1,2,\ldots} |\sum_{n=0}^{m} b_n|$, то $\mathfrak{E}$ является пространством BK, т. е. пространством Банаха, состоящим из числовых последовательностей $a = \{a_k\}$, в котором отображения $a \to a_k$ являются линейными и непрерывными.

Пусть $\mathfrak{B}$ — множество последовательностей $a = \{a_k\}$, для которых ряд (1) суммируем методом Бореля, т. е. существует

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k / k!\right) dx.$$

Доказывается:

1) $e_k = \{0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots\}$, $k = 0,1,2,\ldots$, образуют основное множество в $\mathfrak{E}$.

2. $\mathfrak{B}$ есть пространство FK с псевдонормами

$$\varphi_0(a) = \sup_{0 \leqslant X < \infty} \left| \int_0^X e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k / k!\right) dx \right|;$$

$$\varphi_j(a) = \sum_{k=0}^{\infty} j^k |a_k| / k!,\ j = 1, 2, \ldots$$

Под F-пространством автор понимает линейное пространство, в котором топология задается

счетным множеством псевдонорм. FK-пространство — F-пространство последовательностей $a = \{a_k\}$, в котором отображения $a \to a_k$ линейны и непрерывны.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество тех $a = \{a_k\}$, для которых ряд (1) суммируем треугольным методом C, т. е. существует предел

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{nk} a_k \quad (c_{nn} \neq 0).$$

$\mathfrak{A}$ является BK-пространством с нормой $\| a \| = \sup_{n=0,1,2,\ldots} |b_n|$.

Пусть $e_k \in \mathfrak{A}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть, кроме матрицы $(C) = (c_{nk})$, имеется еще матрица $(H) = (h_{nk})$.

Доказывается:

1. Если $\lim_{n\to\infty} c_{nk} = \lim_{n\to\infty} h_{nk} = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то соотношение

$$a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} h_{nk} a_k e_k \quad (a \in \mathfrak{A})$$

равносильно следующим утверждениям:

1) Для каждого непрерывного линейного функционала $f(a)$ в $\mathfrak{A}$ справедливо

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=0}^{n} h_{nk} a_k e_k\right);$$

2. Каждый непрерывный линейный функционал $f(a)$ в $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} h_{nk} a_k f_k;$$

3) Для каждого непрерывного линейного функционала $f(a)$ в a

$$\sup_{n=0,1,2,\ldots} \left| \sum_{k=0}^{n} h_{nk} a_k f(e_k) \right| < \infty,$$

причем e_k образуют основное множество в $\mathfrak{A}$.

2. Если C есть матрица метода Чезаро (C, r) ($r > 0$ фиксировано), то она обладает свойством 2) при $H = C$. *М. Д. Калашников*

2744. Теорема об абсолютной суммируемости по Риссу. Татчелл (A theorem on absolute Riesz summability. Tatchell J. B.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 1, № 113, 49—59 (англ.)

Пусть $\{\lambda_n\}$ — неубывающая и стремящаяся к ∞ последовательность положительных чисел. Ряд $\sum c_n$ называется абсолютно суммируемым методом Рисса ($|R, \lambda, \varkappa|$) типа λ и порядка $\varkappa \geqslant 0$ к числу C, если

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\lambda_n < x} (1 - x^{-1}\lambda_n)^{\varkappa} c_n = C, \qquad (1)$$

и функция, стоящая под знаком предела в левой части соотношения (1) на $[\lambda_1, \infty)$, имеет ограниченное изменение.

Если ряд $\sum c_n$ суммируем $|R, \lambda, \varkappa|$, то ряд $\sum c_n \lambda_n^{-\varkappa}$ суммируем $|R, l, \varkappa|$, где $l_n = \exp \lambda_n$.

Пользуясь этим, а также результатами Обрешкова и Чандраскарана (Obreschkoff N., Math. Z., 1929, **30**, 375—386; Chandrasekharan K., J. Indian Math. Soc., 1942 (2), **6**, 168—180), автор показывает, что для ряда Дирихле $\sum a_n \exp(-\lambda_n s)$ абсцисса суммируемости его методом $|R, \lambda, \varkappa|$ совпадает с абсциссой суммируемости его методом $|R, l, \varkappa|$. *А. Ф. Тиман*

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

2745. Асимптотическое представление относительного экстремума n-го многочлена Якоби. Вакка (Determinazione asintotica per $n \to \infty$ degli estremi relativi dell' n^{esimo} polinomio di Jacobi. Vacca Maria Teresa), Boll. Unione mat. ital., 1953, **8**, № 3, 277—280 (итал.)

Пусть $x_{1,n} > x_{2,n} > \cdots > x_{n-1,n}$ суть корни производной многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} [n^{-\alpha} P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{r,n})] = (j_{\alpha+1,r}/2)^{-\alpha} J_\alpha(j_{\alpha+1,r}),$$

где $j_{\alpha+1,r}$ есть r-й положительный корень функции Бесселя $J_{\alpha+1}(x)$. *И. П. Натансон*

2746. Неопределенные интегралы от произведений бесселевых и экспоненциальных функций. Дёрр (Unbestimmte Integrale über Produkte von Besselfunktionen mit Exponentialfunktionen. Dörr Johannes), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, **2**, № 3, 353—354 (нем.)

При целочисленных значениях n рассматриваются интегралы

$$W_n(t, b) = n \int_0^t \cos b(t - \tau) [J_n(\tau)/\tau] \, d\tau, \qquad (1)$$

$$R_n(t, a) = n \int_0^t e^{a(t-\tau)} [J_n(\tau)/\tau] \, d\tau. \qquad (2)$$

Эти интегралы встречаются при исследовании прохождения гармонических сигналов через линейные системы с передаточной функцией

$$z_n(\omega) = (\sqrt{1 - \omega^2} - i\omega)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Интегралы (1) можно выразить через интегралы (2). Полагая $a = i \cos\beta$ и используя известную рекуррентную формулу для бесселевых функций, можно (2) выразить через интегралы вида

$$Q_n(t, \beta) = \int_0^t J_n(\tau) \, e^{i(t-\tau)\cos\beta} \, d\tau, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

Автор представляет функцию $Q_n(t, \beta)$ рядами следующих трех типов:

$$Q_n(t, \beta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} i^\nu \varepsilon_\nu J_\nu(t) \, A_\nu(n, \beta) + B(n, \beta, t), \quad (4), (5), (6)$$

где $A_\nu(n, \beta)$ и $B(n, \beta, t)$ имеют соответственно значения:

$$-\frac{e^{i|\nu-n|\beta} + e^{i(\nu+n)\beta}}{2i^n \sin\beta}, \quad \frac{e^{i(n\beta + t\cos\beta)}}{i^n \sin\beta}; \qquad (4)$$

$$\frac{e^{-i|\nu-n|\beta}+e^{-i(\nu+n)\beta}}{2i^n\sin\beta};\quad -\frac{e^{-i(n\beta-t\cos\beta)}}{i^n\sin\beta};\quad (5)$$

$$\frac{\sin|\nu-n|\beta+\sin(\nu+n)\beta}{2i^{n+1}\sin\beta};$$

$$-\frac{\sin n\beta\, e^{it\cos\beta}}{i^{n+1}\sin\beta};\quad (6)$$

где $\varepsilon_\nu = 1$ при $\nu = 0$ и $= 2$ при $\nu \geqslant 1$.

Эти ряды сходятся при произвольном комплексном значении параметра β.

Для указанных выше практических приложений важно знать величину интеграла (3) только в полосе $0 \leqslant \mathrm{Re}\,\beta \leqslant \pi$, причем $0 \leqslant t \leqslant n + 40$.

При выполнении этих условий ряды (4), (5), (6) быстро сходятся, что облегчает числовые расчеты. Рекомендуется при вычислении интеграла $Q_n(t, \beta)$ пользоваться при $\mathrm{Im}\,\beta > 0$, < 0, $= 0$ рядами (4), (5), (6) соответственно.

При $\beta = 0$ и $\beta = \pi$ функция $Q_n(t, \beta)$ совпадает с известными тригонометрическими интегралами Каптейна.

Автор приводит взятый из инженерной практики числовой пример расчета. *Б. Р. Левин*

2747. Асимптотические свойства бесселевых функций и радиация синхротрона. Парк (Asymptotic properties of Bessel functions and the radiation from a synchrotron. Park David), J. Math. and Phys., 1954, 33, № 2, 179—184 (англ.)

Показывается, что величина электромагнитной радиации электрона, выражаемая формулой

$$P_n = n\omega_0 e^2 R^{-1}\left[2\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - (1-\beta^2)\int_0^{2n\beta} J_{2n}(x)\,dx\right]$$

(n велико, β близко к единице), может быть разложена в ряд по степеням параметра $\alpha = -2n^{2/3}(1-\beta)$.

Доказываются формулы

$$\int_0^{\nu+\alpha\nu^{1/3}} J_\nu(x)\,dx \sim \frac{1}{3} + \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi}\times$$

$$\times\left[\alpha + \frac{1}{2}C\alpha^2 - \frac{1}{12}\alpha^4 - \frac{1}{30}C\alpha^5 + \frac{1}{315}\alpha^7 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1008}C\alpha^8 - \frac{1}{16200}\alpha^{10} + \ldots\right],\quad C = 0{,}919$$

и

$$P_n \sim (6^{1/6}/\pi\Gamma(2/3))\,\omega_0(e^2E/RE_0)\,(-\alpha)^{1/2}F(\alpha),$$

где

$$F(\alpha) = 1 + \frac{\Gamma(2/3)}{2^{1/3}3^{1/3}C}\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{20C}\alpha^5 +$$

$$+ \frac{1}{45}\alpha^6 - \frac{1}{420C}\alpha^8 - \frac{1}{1296}\alpha^9 + \cdots$$

Н. С. Кошляков

2748. Соотношения между полиномами, ассоциированными с функциями Эрмита и Лагерра. Паламà (Relazioni tra polinomi associati alle funzioni di Laguerre e di Hermite. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 64—66 (итал.)

Полиномы $G_n(x)$, ассоциированные с полиномами Эрмита $H_n(x)$, определяются равенствами $H_nG_n - H_{n+1}G_{n-1} = n!$, $G_0(x) = 1$. G_n имеет степень n. Полиномы $P_n^{(\alpha)}(x)$, степеней $n-1$, определенные равенствами

$$L_n^{(\alpha)}P_{n-1}^{(\alpha)} - L_{n-1}^{(\alpha)}P_n^{(\alpha)} = (n+1)!\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+n+1),$$

$P_0^{(\alpha)} = 0$, $P_1^{(\alpha)} = 1$, называются ассоциированными с полиномами Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Доказываются соотношения

$$G_{2n-1}(x) = (-2)^{n-1}n!\;xP_n^{(-1/2)}(x^2/2),$$

$$G_{2n}(x) = (-2)^{n-1}n!\;P_n^{(-1/2)}(x^2/2) + x^{-1}H_{2n+1}(x),$$

$$G_{n-1}(x) = (-1)^{n-1}n!\lim_{h\to 0}[h^{n-1}P_n^{(h^{-1}+k)}(xh^{-1}+h^{-2})].$$

2749. Теория векторных шаровых функций. Хилл (The theory of vector spherical harmonics. Hill E. L.), Amer. J. Phys., 1954, **22**, № 4, 211—214 (англ.)

Приводятся соотношения между векторными шаровыми функциями и указываются некоторые их свойства. Автор, следуя изложению Блатта и Вейскопфа (Теоретическая ядерная физика, М., Гостехиздат, 1954), определяет векторные шаровые функции трех типов:

$$\mathbf{V}_{lm} \equiv \mathbf{r}_1\left\{-\left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^{1/2}Y_l^m\right\} + \theta_1\left\{\frac{1}{[(l+1)(2l+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right\} + \varphi_1\left\{\frac{imY_l^m}{[(l+1)(2l+1)]^{1/2}\sin\theta}\right\},$$

$$\mathbf{X}_{lm} \equiv \theta_1\left\{\frac{-mY_l^m}{[l(l+1)]^{1/2}\sin\theta}\right\} + \varphi_1\left\{\frac{-i}{[l(l+1)]^{1/2}}\cdot\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right\},$$

$$\mathbf{W}_{lm} \equiv \mathbf{r}_1\left\{\left(\frac{l}{2l+1}\right)^{1/2}Y_l^m\right\} + \theta_1\left\{\frac{1}{[l(2l+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right\} + \varphi_1\left\{\frac{imY_l^m}{[l(2l+1)]^{1/2}\sin\theta}\right\},$$

где

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\theta,$$
$$\theta_1 = \mathbf{i}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\cos\theta\sin\varphi - \mathbf{k}\sin\theta,$$
$$\varphi_1 = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi,$$

Y_l^m — обычная скалярная шаровая функция. Индекс l принимает все положительные целые значения, $l = 0, 1, 2, \ldots$, и $|m| \leqslant l$.

Векторные шаровые функции ортогональны между собой и образуют полную систему.

Автор особо останавливается на свойствах четности этих функций при отражении от начала координат (т. е. при преобразовании: $\theta' = \pi - \theta$, $\varphi' = \varphi + \pi$). Именно:

$$\mathbf{V}_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^{l+1}\mathbf{V}_{lm}(\theta, \varphi);$$

$$\mathbf{X}_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^{l}\mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi);$$

$$\mathbf{W}_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^{l+1}\mathbf{W}_{lm}(\theta, \varphi).$$

Функции **V** и **W** имеют иную четность, чем функция **X**.

Примечание референта. Векторные шаровые функции в несколько иной форме вводились и употреблялись также и другими авторами (Hansen W., Phys. Rev., 1935, **47**, 139; Петрашень Г., Докл. АН СССР, 1945, **46**, 291; Сорокин В., Ж. эксперим. и теор. физики, 1948, **18**, 228; Берестецкий В. В., Ж. эксперим. и теор. физики, 1948, **18**, 1058; **18**, 1070). *М. А. Гинцбург*

2750. Неравенства для цилиндрических функций при близких значениях аргумента и индекса. Сигел, Слитор (Inequalities involving cylindrical functions of nearly equal argument and order. Siegel K. M., Sleator F. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 337—344 (англ.)

Доказываются неравенства для функции Неймана $N_\nu(\nu x)$ при большем ν ($x < 1$):

если ν — число дробное, то

$$|N_\nu(\nu x)| < \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{\Gamma(1/3)(1 + 2/\sqrt{3}) + |\operatorname{ctg}\nu\pi|}{\pi\sqrt[6]{48\nu^2}} + \frac{1}{|\sin\nu\pi|}\right];$$

если ν равно целому числу n, то

$$|N_n(nx)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{\Gamma(1/3)(2 + \sqrt{3})}{\pi\sqrt[3]{36\,n}} + \frac{1}{2\pi n} + 1\right];$$

наконец, если ν близко, но не равно точно целому числу, то

$$|N_\nu(\nu x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{0{,}964}{\sqrt[3]{\nu}} + \frac{|\cos\nu\pi|}{2\nu\pi} + e^{\varepsilon\pi}\right],$$

где

$$\varepsilon = \{\nu\} = \nu - [\nu].$$

Н. С. Кошляков

2751 РЖ. Коэффициенты интегрирования Ларанжа для функций расстояния, взятых по прямым круговым цилиндрам. Хаммерсли (Lagrangian integration coefficients for distance functions taken over right circular cylinders. Hammersley J. M., J. Math. Phys., 1952, **31**, 139—150) [Рецензия: Бланч (Blanch G.), Math. Tables and Other Aids Comput. 1953, 7, № 42, 87—88 (англ)]

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2752. Об одном обобщении преобразования Фурье и теоремы Винер — Палей. Ахиезер Н. И., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 5, 889—892

Изучается пространство функций L^2_φ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)\overline{g}(x)/\varphi(x))\,dx,$$

где $\varphi(x) \geqslant 1$, $\varphi(0) = 1$ — целая трансцендентная функция нулевого рода, все корни которой лежат в полосе $-A < \operatorname{Re} z < A$ конечной ширины. Этому пространству принадлежат все многочлены, однако их совокупность не плотна в нем.

Пусть $\{P_k(x)\}_0^\infty$ есть полная последовательность ортогональных и нормированных многочленов в L^2_φ. Тогда каждой $f(x) \in L^2_\varphi$ можно сопоставить ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$, где $a_k = (f, P_k)$. В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Всякая функция $f(x) \in L^2_\varphi$ однозначно представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) + \frac{\omega(x)}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{itx}h(t)\,dt + \frac{\overline{\omega}(x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{itx}h(t)\,dt, \qquad (1)$$

где $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, $h(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ и интегралы справа сходятся в среднем квадратичном. При этом

$$(f, f) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\,dt.$$

Обратно, всякая функция $f(x)$, представимая в виде (1), где $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ и $h(t) \in L^2(-\infty, \infty)$, принадлежит L^2_φ.

Теорема 2. Целая трансцендентная функция $f(z)$ степени σ тогда и только тогда принадлежит L^2_φ на вещественной оси, если она допускает представление

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z) + \frac{\omega(z)}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\sigma e^{itz}h(t)\,dt + \frac{\overline{\omega}(z)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{0} e^{itz}h(t)\,dt,$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} |h(t)|^2\,dt < \infty.$$

Последняя теорема является обобщением теоремы Винера — Пэли. *Б. М. Левитан*

2753. О преобразовании Фурье — Стилтьеса и об абсолютно непрерывных функциях. Эссен (A note on Fourier — Stieltjes transforms and absolutely continuous functions. Esseen Carl-Gustav), Math. scand., 1954, **2**, № 1, 153—157 (англ.)

Доказывается теорема:

Пусть $F(\alpha)$ — действительная или комплексная функция α, $-\infty < \alpha < +\infty$; $\int_{-\infty}^{+\infty} |dF(\alpha)| < +\infty$, $f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\alpha}\, dF(\alpha)$; если $f(u) \in L^2$ на бесконечном интервале $\omega = (-\infty, \infty)$, (a, ∞), $(-\infty, a)$, где a конечно, то $F(\alpha)$ абсолютно непрерывна. Этот результат обобщает предыдущий результат автора (Esseen C. -G., Acta Math., 1945, **77**, 1—125), где предполагалось, что $f(u) \equiv 0$ на ω.

Ф. В. Широков

2754. Об одной формуле Эфроса. Влодарский (Sur une formule de Efros. Włodarski Lech), Stadia math., 1953, **13**, № 2, 183—187 (франц.)

Автор доказывает, что формула

$$L^{-1}\{v(s)\, F[q(s)]\} = \int_0^\infty f(\tau)\, L^{-1}\{v(s) \exp[-\tau q(s)]\} d\tau$$

(Эфрос А. М., Матем. сб., 1935, **42**, 699—705; Диткин В. А., Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, М.—Л., Гостехиздат, 1951, 62—67), где

$$F(s) = L\{f\} = \int_0^\infty f(t) \exp(-st)\, dt,$$

верна при следующих условиях:

1) $\int_0^\infty |f(t)| \exp(-\sigma t)\, dt < +\infty$ для некоторого $\sigma \geqslant 0$;

2) функция $q(s)$ голоморфна в области $|\arg(s-\gamma)| < (\pi/2) + \alpha$ ($\gamma > 0$, $0 < \alpha < \pi/2$) и в этой области удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}[q(s)] \geqslant \sigma$;

3) в этой области $|v(s)| \leqslant M |s|^{-\beta}$ ($M > 0$, $\beta > 0$).

Автор приводит пример, показывающий, что рассматриваемая формула может оказаться лишенной смысла, если эти предположения не выполняются. Доказательство опирается на следующую лемму: если $G(s)$ — голоморфная функция в области $|\arg(s-\gamma)| < (\pi/2) + \alpha$ (γ действительно, $0 < \alpha < \pi/2$) и $|G(s)| < M|s|^{-\beta}$ (где $M > 0$, $\beta > 0$) и если

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c G(s) \exp(st)\, ds,$$

где интеграл берется вдоль линии $|\arg(s-\delta)| = (\pi/2) + \alpha$, $\delta > \gamma$, то $G(s) = L\{g\}$.

J. G. Mikusiński

2755. Замечание к операционным изображениям некоторых специальных функций. Багчи, Мукхерджи (Note on the operational representations of some special functions. Bagchi Hari das, Mukherjee Bhola nath), Math. Z., 1954, **60**, № 1, 88—93 (англ.)

При помощи операционного исчисления исследуются свойства функций Эрмита второго рода h_ν:

$$h_{2n}(x) = (-1)^n n!\, 2^{2n+1/2}\, x_1F_1(-n + 1/2, 3/2, x^2),$$

$$h_{2n+1}(x) = (-1)^n n!\, 2^{2n+1/2}\, {}_1F_1(-n - 1/2, 1/2, x^2)$$

(n — целое положительное).

Используя непосредственно или при помощи элементарных преобразований основные правила операционного исчисления, авторы получают некоторые соотношения между функциями h_ν и другими специальными функциями, в частности также функциями Эрмита первого рода.

Формулы (14) и (15) работы не имеют смысла, ибо интегралы в этих формулах расходятся.

Э. Я. Риекстыньш

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2756. Вычисление переходных процессов в динамических системах. Уорд (The calculation of transients in dynamical systems. Ward E. E.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 1, 49—59 (англ.)

Для обращения рационального изображения Лапласа автор предлагает общеизвестный прием — разлагать изображение в ряд по функциям $(s-b)^n/(s+b)^{n+1}$ (b — вещественное), что дает разложение оригинала в ряд по функциям $e^{-bt}L_n(2bt)$, и практически пользоваться только некоторыми начальными членами разложения.

По мнению автора, преимущество этого приема состоит в том, что в таком случае не надо знать полюсов данной рациональной функции. Автор пытается установить наиболее выгодное значение b для того, чтобы коэффициенты разложения по возможности быстрее убывали, но для этого оказывается желательным знать указанные полюсы. Приводится много числовых примеров, в которых сравниваются точные значения оригинала со значениями частных сумм первых семи членов разложения.

Э. Я. Риекстыныш

2757. Распространение импульса по волноводу. Котт (Propagation d'une impulsion sur un guide d'ondes. Cotte Maurice), Onde électr., 1954, **34**, № 323, 143—146 (франц.), 97 (резюме франц.), 98 (резюме англ.)

Исследуется распространение некоторых простейших сигналов (сигнала, описываемого δ-функцией, и вообще сигнала краткой длительности) по волноводу, стены которого обладают конечной проводимостью. Автор применяет результаты своих ранних работ (C. r. Acad. sci., 1945, **221**, 538; Ann. télécommuns, 1946, **1**, № 3—4, 49—52), пользуясь преобразованием Лапласа. В частности, применяются разложения изображений функций по неположительным (целым и дробным) степеням p, умноженным на некоторые экспоненциальные выражения, содержащие p в показателе степени. После перехода к оригиналам получаются выражения, имеющие смысл бегущих волн и справедливые в окрестности фронта волны.

В дополнении рассмотрено распространение группы волн, т. е. сигнала вида $y(t) = M(t) \sin(\Omega t - \varphi)$

($M(t)$ отлично от нуля лишь в некотором промежутке оси t, длина которого значительно превышает $2\pi/\Omega$), по волноводу, стены которого обладают идеальной проводимостью. *Н. А. Бразма*

2758. **Разложение атмосферного давления в ряды по сферическим функциям. Оттле, Леду** (Développements en séries de fonctions sphériques de la pression atmosphérique. Ottelet J., Ledoux P.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, **23**, № 1, 13—23 (франц.; резюме англ.)

Рассматривается внешняя предельная задача для сферы, на поверхности которой заданная функция $f(\theta, \varphi)$ географических координат θ, φ разлагается в ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{n,m}(\theta)\,(A_{n,m} \cos m\varphi + B_{n,m} \sin m\varphi),$$

где $P_{n,m}$ означает присоединенную функцию Лежандра, а коэффициенты $A_{n,m}, B_{n,m}$ определяются формулами

$$\left.\begin{matrix} A_{n,m} \\ B_{n,m} \end{matrix}\right\} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) P_{n,m}(\theta) \times \left\{\begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}\right\} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Для вычисления двойных интегралов применяется метод Прево (Prévost G., Tables des fonctions sphériques, Paris, 1933), заключающийся в разбиении поверхности сферы на отдельные части, в которых можно принять функцию $f(\theta, \varphi)$ постоянной. Пользуясь этим методом, автор строит таблицы для вычисления величин атмосферного давления в различных точках поверхности земного шара. *Н. С. Кошляков*

См. также: 2501, 2505, 2531, 2544, 2676 К, 2690, 2700, 2705, 2721, 2801

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

2759. **Общие условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, действующего в пространстве непрерывных функций. Ладыженский Л. А.,** Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 6, 1105—1108

Исследуется нелинейный интегральный оператор

$$A\varphi(x) = \int_G K[x, y, \varphi(y)]\, dy, \qquad (1)$$

где G — замкнутое ограниченное множество n-мерного евклидова пространства.

Теорема 1. Пусть функция $K(x, y, u)$ $(x, y \in G, -\infty < u < \infty)$ удовлетворяет условиям:

а) $K(x, y, u)$ непрерывна по u при всех $x \in G$ и почти при всех $y \in G$ и измерима по y при всех $x \in G$, $-\infty < u < \infty$;

б) каково бы ни было положительное число a, для каждого $x \in G$

$$\int_G \sup_{u \leqslant a} |K(x, y, u)|\, dy < \infty;$$

в) каково бы ни было $a > 0$, для каждого $x \in G$

$$\lim_{\substack{|h| \to 0 \\ x+h \in G}} \int_G \sup_{u \leqslant a} |K(x+h, y, u) - K(x, y, u)|\, dy = 0.$$

Тогда оператор (1) определен и вполне непрерывен в пространстве C непрерывных на G функций.

Если (1) — линейный интегральный оператор, то условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для полной непрерывности (1) в пространстве C (Радон И., Успехи матем. наук, 1936, № 1).

Далее рассматривается оператор вида

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y) f[y, \varphi(y)]\, dy. \qquad (2)$$

Формулируются два достаточных признака полной непрерывности оператора (2) в пространстве C. Приведем один из них.

Теорема 2. Пусть $f(y, u)$ измерима по y и непрерывна по u почти при всех $y \in G$, причем при этих y для любого $a > 0$ найдется такое число $F(a)$, что $|f(y, u)| \leqslant F(a)$, $(|u| \leqslant a)$. Пусть линейный интегральный оператор, определенный ядром $K(x, y)$, вполне непрерывен в C. Тогда оператор (2) действует в C и вполне непрерывен. *М. А. Красносельский*

2760. **Новейшее развитие теории локально выпуклых векторных пространств. Дьёдонне** (Recent developments in the theory of locally convex vector spaces. Dieudonné J. A.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 6, 495—512 (англ.)

Обзор результатов общей теории локально выпуклых пространств (л. в. п.), полученных в последние годы (и частично еще не опубликованных). Отмечаются два направления исследований, стимулировавшие развитие этой теории: с одной стороны, «пионерская работа» О. Тёплица, Г. Кётэ и их учеников по пространствам последовательностей, связанная с теорией аналитических функций; с другой — исследования по теории интегрирования, имевшие целью «освобождение этой теории от оков теории меры Каратеодори и превращение ее в простую главу общей теории топологических векторных пространств»; кульминационным пунктом этих исследований явилась теория «распределений» («обобщенных функций») Л. Шварца (1945), уже не укладывающаяся в рамки (B)-пространств Банаха; «осознание этого побудило к весьма активному исследованию более общих пространств, явившемуся источником большинства результатов, полученных за последние несколько лет» и приведшему «к новой классификации и переоценке» всего материала теории. При этом неожиданно оказалось, что «ни одно

важное свойство (B)-пространств не специфично только для них».

Приведем основные понятия и некоторые предложения, рассмотренные в статье. Л. в. п. E есть векторное пространство над полем R вещественных (или C комплексных) чисел, обладающее полной системой выпуклых окрестностей нуля, определяющей топологию, в которой сложение и умножение на скаляры непрерывны; в дальнейшем топология во всех рассматриваемых л. в. п. предполагается хаусдорфовой. $A \subset E$ называется поглощающим $B \subset E$, если $\lambda B \subset A$ для некоторого $\lambda > 0$, и просто поглощающим, если A поглощает каждую точку. $B \subset E$ называется ограниченным (соответственно вполне ограниченным), если его поглощает (соответственно покрывает конечным числом своих сдвигов) любая окрестность нуля. E нормируемо тогда и только тогда, когда содержит ограниченную выпуклую окрестность нуля (Колмогоров). E называется полным, квазиполным или полуполным, если в нем сходятся произвольные, соответственно состоящие лишь из ограниченных множеств или счетные «фильтры Коши», т. е. центрированные системы произвольно малых множеств. E называется t-пространством (espace tonnelé), если в нем каждая «бочка» (tonneau), т. е. замкнутое выпуклое поглощающее множество, есть окрестность нуля. Всякое л. в. п. E, являющееся «пространством Бэра», т. е. II категории в себе, есть t-пространство. Таковы (B)-пространства и, более общо, (F)-пространства, т. е. метризуемые полные л. в. п.; однако существуют t-пространства, не являющиеся пространствами Бэра, как и полные л. в. п., не являющиеся t-пространствами. В t-пространствах верна теорема Банаха — Штейнхауса: Предел каждой всюду сходящейся последовательности непрерывных линейных отображений t-пространства E в произвольное л. в. п. F непрерывен, причем сходимость равномерна на всяком вполне ограниченном множестве. Замкнутое подпространство t-пространства может уже не быть t-пространством.

Семейство $\mathfrak{S}$ ограниченных множеств из л. в. п. E, подчиненное некоторым требованиям, определяет в векторном пространстве $\mathcal{L}(E, F)$ всех непрерывных линейных отображений E в л. в. п. F локально выпуклую $\mathfrak{S}$-топологию, полную систему окрестностей нуля которой образуют множества $T(A, V)$ всех $u \in \mathcal{L}(E, F)$ таких, что $u(A) \subset V$, где V — окрестности нуля в F. (топология равномерной сходимости на множествах $A \in \mathfrak{S}$). Среди $\mathfrak{S}$-топологий имеется самая сильная — когда $\mathfrak{S}$ состоит из всех ограниченных множеств (топология ограниченной сходимости), и самая слабая — когда $\mathfrak{S}$ состоит из конечных множеств (топология точечной сходимости); при этом та топология считается сильней, в которой больше замкнутых множеств. При $F = R$ (или C) $\mathcal{L}(E, F)$ есть сопряженное к E пространство E' линейных функционалов. Полную систему окрестностей нуля $\mathfrak{S}$-топологии в E' образуют поляры A° множеств $A \in \mathfrak{S}$, т. е. множества $x' \in E'$ таких, что $|x'(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in A$. Топология $\beta(E', E)$ ограниченной сходимости на E' называется сильной, топология $\sigma(E', E)$ точечной сходимости — слабой. Вследствие теоремы Тихонова о бикомпактности произведения бикомпактных пространств, поляры V° окрестностей нуля $V \subset E$ слабо бикомпактны. E есть t-пространство тогда и только тогда, когда каждое слабо ограниченное множество в E', и вообще в любом $\mathcal{L}(E, F)$, равностепенно непрерывно или, что то же, — когда E' слабо квазиполно. Пространство E'', сопряженное к сильному E' и снабженное сильной топологией $\beta(E'', E')$, называется вторым сопряженным к E. Оно мало изучено; так, неизвестно, всегда ли оно полно, даже если E есть t-пространство. $\sigma(E'', E')$ индуцирует в E, которое можно считать вложенным в E'', топологию $\sigma(E, E')$, вообще более слабую, чем исходная, но определяющую те же замкнутые выпуклые и те же ограниченные множества. $E'' = E$ (E полурефлексивно) тогда и только тогда, когда каждое слабо замкнутое ограниченное множество в E слабо бикомпактно; при этом $\beta(E'', E')$ совпадает с исходной топологией в E (E рефлексивно) тогда и только тогда, когда E к тому же t-пространство. Замкнутое подпространство полурефлексивного л. в. п. полурефлексивно; однако замкнутое подпространство рефлексивного л. в. п. может уже не быть рефлексивным, а фактор-пространство — даже полурефлексивным. Пространством Монтеля ((M)-пространством) называется t-пространство, в котором каждое замкнутое ограниченное множество бикомпактно. Бесконечномерное (B)-пространство не может быть (M)-пространством. Однако (M)-пространствами являются многие функциональные пространства, в частности пространство аналитических функций, регулярных в открытой области, с топологией равномерной сходимости на компактах, и многие пространства, встречающиеся в теории обобщенных функций. Замкнутое подпространство и фактор-пространство (M)-пространства могут уже не быть (M)-пространствами.

Л. в. п. E называется проективным, соответственно индуктивным, пределом семейства л. в. п. F_α при данных линейных отображениях E в F_α, соответственно F_α в E, если топология в E слабейшая, соответственно сильнейшая, из локально выпуклых топологий, в которых эти отображения f_α, соответственно g_α, непрерывны. $x \to (f_\alpha(x))$ есть изоморфное вложение проективного предела E в произведение $\prod F_\alpha$. Каждое л. в. п. есть проективный предел и тем самым векторное топологическое подпространство произведения (B)-пространств. Примеры индуктивных пределов: 1) Сумма $\sum E_\alpha$ л. в. п. E_α, образованная элементами $x \in \prod E_\alpha$, у которых лишь конечное число координат $x_\alpha \neq 0$, с окрестностями нуля, являющимися выпуклыми оболочками множеств $\bigcup g_\alpha(U_\alpha)$, где $\{U_\alpha\}$ — всевозможные наборы окрестностей нуля в пространствах E_α и $g_\alpha(U_\alpha)$ — совокупности тех $x \in \sum E_\alpha$, все координаты которых, кроме x_α, нули, а $x_\alpha \in U_\alpha$. $\sum E_\alpha$ полно, когда полны все E_α. Если E_α одномерны, то $E = \sum E_\alpha$ имеет сильнейшую из всех локально выпуклых топологий, какие можно ввести в векторном пространстве E. Суммы и произведения л. в. п. взаимно сопряжены. 2) Индуктивный предел $E = \bigcup E_n$ строго возрастающей последовательности л. в. п. (E_n), каждое из которых — топологическое подпространство следующего, причем $f_\alpha = f_n$ — тождественные отображения $E_n \to E$. Ограничены в E множества, содержащиеся и ограниченные в каком-либо E_n. Если все E_n (F)-пространства, то E называется (LF)-пространством; к этому важному

классу функциональных пространств принадлежит, в частности, пространство «финитных» бесконечно дифференцируемых функций на R (или R^n). Замкнутое подпространство и фактор-пространство (LF)-пространства могут уже не быть (LF)-пространствами. 3) Индуктивный предел $E = \bigcup g_\alpha(E_\alpha)$ нормированных пространств E_α. Это л. в. п. E называется ограниченно замкнутым (espace bornologique) и характеризуется также тем, что всякое ограниченное (на ограниченных множествах) линейное отображение его в любое л. в. п. F непрерывно. Метризуемые л. в. п. ограниченно замкнуты. Сильное сопряженное к (F)-пространству ограниченно замкнуто тогда и только тогда, когда является t-пространством. Произведение совокупности ограниченно замкнутых л. в. п., мощность которой $\leqslant \mathfrak{c}$, ограниченно замкнуто; верно ли это для бóльших мощностей — открытый вопрос, равносильный проблеме Улама о несуществовании вполне аддитивной меры, определенной на всех подмножествах множества мощности $>\mathfrak{c}$, принимающей лишь значения 0 и 1 и равной нулю на всех конечных множествах. Замкнутое подпространство ограниченно замкнутого л. в. п. может не быть ограниченно замкнутым. Сохраняется ли ограниченная замкнутость при пополнении — неизвестно. С индуктивными пределами связано наиболее широкое полученное до сих пор обобщение теоремы Банаха о замкнутом графике: линейное отображение полуполного ограниченно замкнутого л. в. п. E в индуктивный предел $F = \bigcup g_n(F_n)$ последовательности (F)-пространств F_n, имеющее замкнутый график в $E \times F$, непрерывно (так что непрерывное линейное отображение F на E есть открытый гомоморфизм).

Конец статьи посвящен тензорным произведениям л. в. п. Пусть E и F л. в. п. Всякое векторное подпространство $B(E, F)$ пространства $\mathfrak{B}(E, F)$ всех билинейных функционалов на $E \times F$, непрерывных по каждому аргументу в отдельности, можно рассматривать как пространство линейных функций на тензорном произведении $E \otimes F$, т. е. векторном пространстве всех формальных конечных сумм $\Sigma x_i \otimes y_i$, где

$$(x_1 + x_2) \otimes (y_1 + y_2) =$$
$$= x_1 (\otimes) y_1 + x_1 \otimes y_2 + x_2 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$$

и

$$(\alpha x) \otimes (\beta y) = (\alpha\beta)(x \otimes y).$$

Пополнения $E \otimes F$ по $\mathfrak{S}$-топологиям, в которых окрестностями нуля служат поляры M^0 семейств $\mathfrak{S}$ слабо ограниченных множеств $M \subset B(E, F)$, называют топологическими тензорными произведениями л. в. п. E и F. Рассмотрены три их типа: а) индуктивное тензорное произведение $E \otimes_0 F$: $B(E, F) = \mathfrak{B}(E, F)$, $\mathfrak{S}$ — совокупность всех $M \subset \mathfrak{B}(E, F)$, которые при каждом фиксированном значении любого из аргументов равностепенно непрерывны по другому; б) проективное тензорное произведение $E \otimes_1 F$ ($\supset E \otimes_0 F$): $B(E, F) = \mathscr{B}(E, F)$ — пространство всех непрерывных билинейных функционалов, $\mathfrak{S}$ — совокупность всех равностепенно непрерывных $M \subset \mathscr{B}(E, F)$; $(E \otimes_1 F)' = \mathscr{B}(E, F)$; в) бипроективное тензорное произведение $E \otimes_2 F$ ($\supset E \otimes_1 F$): $B(E, F) = E' \otimes F'$, где $x' \otimes y'$ — обыкновенные произведения $x'(x)\, y'(y)$ линейных функционалов $x' \in E'$, $y' \in F'$, а $\mathfrak{S}$ — совокупность всех $M = P \otimes Q$ с равностепенно непрерывными $P \subset E'$, $Q \subset F'$. Тензорные произведения $E' \otimes_k F$ можно рассматривать как пространства линейных отображений E в F, являющихся в том или ином смысле пределами конечномерных отображений $x \to \Sigma x_i'(x)\, y_i$, составляющих $E' \otimes F$. Так, если E — рефлексивное (B)-пространство с базисом, то $E' \otimes_2 E$, с сильным E', есть пространство всех вполне непрерывных линейных операторов в E, а $(E' \otimes_2 E)'' = (E \otimes_1 E')' = \mathscr{B}(E, E')$ — пространство всех ограниченных линейных операторов в E (обобщение теоремы Диксмье о втором сопряженном к пространству вполне непрерывных линейных операторов в гильбертовом пространстве). Если $E \otimes_1 F = E \otimes_2 F$ для всякого F, то E называется ядерным (espace nucléaire); к этому типу принадлежит большинство л. в. п., рассматриваемых в теории распределений и теории аналитических функций. Полные ядерные t-пространства являются (M)-пространствами. Среди бесконечномерных л. в. п. ядерные наиболее близки по своим свойствам к конечномерным; в частности, среди (F)-пространств ядерные — единственные, в которых каждый безусловно сходящийся ряд абсолютно сходится (обобщение теоремы Дворецкого и Роджерса о том, что единственными такими (B)-пространствами являются конечномерные). Замкнутые подпространства и фактор-пространства ядерного л. в. п., а также сильное сопряженное к ядерному (F)-пространству,— ядерные. Если E и F — полные ядерные л. в. п., то $E \otimes_1 F = E \otimes_2 F$ — тоже ядерное; приводится ряд его свойств. Теория тензорных произведений л. в. п., принадлежащая А. Гротендику, известна пока лишь по кратким сообщениям (см. РЖМат,1955, 1374). Полное изложение ее будет опубликовано в «Mem. Amer. Math. Soc.»

Библиография, 63 названия *Д. А. Райков*

2761. О наследственности некоторых топологических векторных пространств. Дьёдонне (Sur les propriétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques. Dieudonné J.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 50—55 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Принадлежность локально выпуклого пространства как к классу ограниченно замкнутых, так и к классу t-пространств распространяется на его векторные топологические подпространства, факторпространства по которым конечномерны.

Д. А. Райков

2762. Некоторые обобщения теорем о прямых произведениях линейных локально выпуклых пространств. Амемия (Quelques généralisations des théorèmes concernant aux produits directs des espaces linéaires localement convexes. Amemiya Ichiro), Math. J. Okayama Univ., 1953, 2, 185—189 (франц.)

Улучшая результат Такеноути (Takenouchi Osamu, Math. J. Okayama Univ., 1952, 2, 57—84), автор показывает, что прямое произведение регулярного кардинального числа «борнологических» пространств является снова «борнологическим».

Как указывает сам автор, тот же факт был получен Доногом и Смитом (Donoghue W. F., Jr., Smith K. T., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 73, 321—344), которые, дополняя ранее полученный результат Макея, показали в более общей форме, что прямое произведение $\prod_{i \in I} E_i$ «борнологических» пространств

E_i ($\dim E_i \geqslant 1$), является «борнологическим» в том и только в том случае, когда задача определения меры Улама на I не имеет решения. *L. Nachbin*

Перевод из Math. Revs., 1954, 15, № 3, 233.

2763. Линейные топологии в полуупорядоченных линейных пространствах. Накано (Linear topologies on semi-ordered linear spaces. Nacano Hidegorô), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 1953, сер. 1, 12, 87—104 (англ.)

Автор значительно обобщает теорему Рисса — Фишера о полноте. Пусть R — универсально непрерывное полуупорядоченное линейное пространство (условно полное линейное частично упорядоченное множество) элементов $f, g, \ldots$ Функция $\lambda(u)$, определенная для всех $u \geqslant 0$ из R, $0 \leqslant \lambda(u) < \infty$, называется псевдонормой, если $\lambda(0) = 0$ и если из $u_1 \leqslant u_2$ следует $\lambda(u_1) \leqslant \lambda(u_2)$. Предположим, что дано семейство псевдоноpм, обладающее свойством: для каждой λ_α из этого семейства существует постоянная $k(\alpha) < \infty$ и конечное число псевдонорм $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ из семейства такие, что для всех u, v

$$\lambda_\alpha(u+v) \leqslant k(\alpha)[\max_i \lambda_i(u) + \max_i \lambda_i(v)].$$

Пусть теперь f_μ — обобщенная последовательность элементов из R (μ пробегает направленное множество). Назовем f_μ обобщенной последовательностью Коши, если $\lambda(|f_\mu - f_\nu|) \to 0$ для каждой псевдонормы λ из данного семейства. Назовем f_μ сходящейся, если для некоторого f из R и для каждой λ из данного семейства $\lambda(|f - f_\mu|) \to 0$. Каждая сходящаяся обобщенная последовательность является обобщенной последовательностью Коши. Теорема о полноте получается при двух предположениях: 1) если $u = \sup u_\mu$, то $\lambda(u) = \sup \lambda(u_\mu)$ для каждой λ из семейства; 2) если для каждой λ из семейства $\sup \lambda(u_\mu)$ конечна, то $\sup u_\mu$ существует в R (предполагается, что $u_\mu \leqslant u_\nu$, если $\mu \leqslant \nu$). При наличии лишь одного условия 1) показывается, что каждая обобщенная последовательность Коши f_μ, ограниченная в смысле упорядоченности (т. е. для некоторого u из R все $|f_\mu| \leqslant u$), сходится. (Референт отмечает, что приведенные доказательства фактически справедливы для более общего случая, когда «линейное пространство» заменено «группой»). Рассматривается равномерная топология, определяемая в R посредством псевдонорм. *I. Halperin*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 137.

2764. О некоторых особенностях линейных ограниченных преобразований. Оден (Sur certaines singularités des transformations linéaires bornées. Audin Maurice), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 23, 2221—2222 (франц.)

Рассматривается линейный ограниченный оператор A, отображающий комплексное банахово пространство E в себя. $\mathfrak{M}_n(A, \lambda)$ — подпространство нулей оператора $(I - \lambda A)^n$, где I — тождественный оператор, λ — число. $\mathfrak{N}(A, \lambda)$ — линейная оболочка всех $\mathfrak{M}_n(A, \lambda)$ ($n = 1, 2, \ldots$), Те значения λ, для которых $\mathfrak{N}(A, \lambda)$ имеет конечное число измерений, называются точками Рисса. A^* — оператор, сопряженный с A. Множество Φ_A тех точек λ, для которых область значений оператора $I - \lambda A$ замкнута, а $\mathfrak{M}_1(A, \lambda)$ и $\mathfrak{M}_1(A^*, \lambda)$ имеют одинаковую конечную размерность, называется областью Фредгольма оператора A. Наибольший круг с центром в точке $\lambda = 0$, содержащийся в Φ_A, называется кругом Фредгольма, его радиус R_A — радиусом Фредгольма.

Автор формулирует некоторые результаты о линейном ограниченном операторе в его области Фредгольма, являющиеся обобщением известных результатов Ф. Рисса о вполне непрерывных операторах. Эти обобщения не являются новыми; они содержатся в совместной с М. А. Гольдманом статье референта (Докл. АН СССР, 1952, 86, № 1, 15—17) и в статьях референта (РЖМат, 1953, 330; 1954, 2228). Утверждение автора о том, что всякая точка Рисса является точкой Фредгольма, неверно, потому что конечномерность $\mathfrak{N}(A, \lambda)$ не влечет равенства размерностей $\mathfrak{M}_1(A, \lambda)$ и $\mathfrak{M}_1(A^*, \lambda)$.

Автор вводит радиус Шмидта ρ_A, т. е. радиус наибольшего круга, центр которого находится в точке $\lambda = 0$, и в котором применим второй метод Шмидта (Schmidt E., Math. Ann., 1907, 64 161—174) эффективного решения уравнения $(I - \lambda A)\varphi = f$. Результат автора, состоящий в том, что $\rho_A = R_A$, содержится в работе С. М. Никольского (Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, 7, № 3, 159).

Все результаты формулируются без доказательства. *С. Н. Крачковский*

2765. О геометрии линейных функциональных областей. Эванс, Пеллегрино (Sulla geometria delle regioni funzionali lineari. Evans Elisabetta, Pellegrino Franco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 96—98 (итал.)

Существует взаимно однозначное соответствие между линейными функциональными областями (A) в пространстве S локально аналитических биреглярных функций и замкнутыми непустыми подмножествами A, имеющими непустое дополнение, на комплексной сфере (теорема Фантаппие). Фантаппие показал также, что $(A) \cap (B) = (A \cup B)$. В множестве областей вводится операция x, определяемая как $(A)\,x\,(B) = (A \cap B)$, и показывается, что $(A) \cap (B \cap C) = (A \cup B)\,x\,(A \cup C)$. Эта операция позволяет определить объединение двух областей из S и устанавливает двойственность между гиперплоскостями в S и точками комплексной сферы. *Н. Я. Виленкин*

2766. О топологии в линейных функциональных областях. Френер, Пеллегрино (Sulla topologia delle regioni funzionali lineari. Frehner Hedi, Pellegrino Franco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 105—107 (итал.)

Рассматриваются различные топологии в линейных функциональных областях (A) пространства S (см. реф. 2765). Топология, индуцированная в (A) топологией S, является T_0-топологией и определяется введением в (A) окрестностей (A', σ), где $A' \supseteq A$. Топологизированное таким образом (A) обозначается $(A)_a$. Если $y_i \in (A)$, $i = 1, 2$, и $\operatorname{dist}(y_1, y_2) = \max|y_1 - y_2|$, то $\operatorname{dist}(y_1, y_2)$ является псевдорасстоянием и (A) с соответствующей топологией является T_3-пространством $(A)_b$. Фактор-пространство $\{A\}_a$, получаемое из (A) отождествлением функций,

совпадающих в некоторой окрестности A, является топологической группой. Если множество A совершенно, то аналогично определяемое $\{A\}_b$ является метризуемым пространством. *Н. Я. Виленкин*

2767. О некоторых свойствах смешанных аналитических функционалов и определяемых ими операторов. Пеллегрино, Суччи (Su alcune proprietà dei funzionali analitici misti e degli operatori da essi determinati. Pellegrino Franco, Succi Francesco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 173—175 (итал.)

Смешанным аналитическим функционалом называется функционал $f = F[y(t), z]$, зависящий от функции $y(t)$ и от числа z. Обозначим через $R(y)$ совокупность всех таких z, что функционал определен для $y(t)$; $R = \bigcup R(y)$, а через $\mathscr{R}(z)$ (или через $A(z)$, если функционал F линеен) — совокупность $y(t)$ таких, что функционал определен для z; $\mathscr{R} = \bigcup \mathscr{R}(z)$. Функционал F определяет оператор $Fy(t) = f(z)$, где функции $f(z)$ заданы на $R(y)$. Если аналитический оператор $Fy = f$ определен на объединении линейных областей $\mathscr{R} \equiv \bigcup_{z \in R} A(z)$ и функция (y_0, M_0) лежит в $\mathscr{R}$, то для любой другой функции (y, M) из $\mathscr{R}$ такой, что $M \subseteq M_0$, имеем $R(y) \subseteq R(y_0)$. Если же $M \equiv M_0$, то $R(y) \equiv R(y_0)$, т. е. оператор F преобразует функции, определенные в одной и той же области. При этом положение особенностей функции $f(z)$ зависит только от положения особенностей функции $y(t)$. Любой аналитический оператор, определенный в $\bigcup A(z)$, определяется некоторым смешанным функционалом, удовлетворяющим некоторым условиям непрерывности. *Н. Я. Виленкин*

2768. Разделение переменных в гильбертовых пространствах. Кордес (Separation der Variablen in Hilbertschen Räumen. Cordes Heinz Otto), Math. Ann., 1953, **125**, № 5, 401—434 (нем.)

С точки зрения теории операторов в гильбертовом пространстве рассматривается разделение переменных в граничных задачах для уравнений в частных производных.

Пусть $\mathfrak{H}^1$ — гильбертово пространство со скалярным произведением (u^1, v^1), S^1 и T^1 — действующие в нем неотрицательные ограниченные операторы такие, что $S^1 + T^1 = E$. Аналогичные операторы S^2 и T^2 определены во втором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}^2$ со скалярным произведением (u^2, v^2). Строится прямое произведение $\mathfrak{H}'$ пространств $\mathfrak{H}^1$ и $\mathfrak{H}^2$ (т. е. рассматривается совокупность всевозможных формальных выражений вида $u = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^1 u_\nu^2$, $u_\nu^1 \in \mathfrak{H}^1$, $u_\nu^2 \in \mathfrak{H}^2$) со скалярным произведением, определенным на векторах вида $u = u^1 u^2$, $v = v^1 v^2$ посредством равенства $(u, v) = (S^1 u^1, v^1)(S^2 u^2, v^2) + (T^1 u^1, v^1)(T^2 u^2, v^2)$, а на остальные векторы распространенным билинейным образом; пополнение $\mathfrak{H}'$ обозначим через $\mathfrak{H}$.

По линейному оператору F^1 с областью определения $\mathfrak{D}(F^1)$, действующему в $\mathfrak{H}^1$, следующим образом строится оператор F^1, действующий в $\mathfrak{H}'$: $\mathfrak{D}(F^1)$ состоит из всех

$u = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^1 u_\nu^2$, $u_\nu^1 \in \mathfrak{D}(F^1)$, $u_\nu^2 \in \mathfrak{H}^2$, $F^1 u = \sum_{\nu=1}^{n} (F^1 u_\nu^1) u_\nu^2$.

Аналогичное построение производится для пространства $\mathfrak{H}^2$.

Основная цель работы состоит в получении достаточных критериев самосопряженности оператора $A = (S^1 S^2 + T^1 T^2)^{-1} \cdot (A^1 S^2 + A^2 T^1)$ в $\mathfrak{H}$ с естественной областью определения, построенного по заданным самосопряженным операторам A^1 и A^2 в пространствах $\mathfrak{H}^1$ и $\mathfrak{H}^2$ соответственно. Установлены критерии, формулирующиеся, большей частью, в терминах ограниченности обратных операторов к некоторым линейным комбинациям операторов A^j, S^j и T_1^j $(j = 1, 2)$ и в терминах спектра и разложений единицы операторов A^1 и A^2.

Построенная теория охватывает, например, краевую задачу вида:

$$(C_x + C_y)\, u(x, y) = \lambda (D_x + D_y)\, u(x, y)$$
$$(x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y_1 \leqslant y \leqslant y_2);\ u(x_1, y) = \quad (1)$$
$$= u(x, y_2) = u(x_2, y) = u(x, y_1) = 0,$$

где C_x, D_x (C_y, D_y) — дифференциальные операторы, зависящие только от x (y). В этом случае можно положить (при дополнительных ограничениях на операторы в (1)) $S^1 = (E + D_x)^{-1} D_x$, $T^1 = (E + D_x)^{-1}$, $A^1 = (E + D_x)^{-1} C_x$, $S^2 = (E + D_y)^{-1}$, $T^2 = (E + D_y)^{-1} D_y$, $A^2 = (E + D_y)^{-1} C_y$, а в качестве $\mathfrak{H}^1$ и $\mathfrak{H}^2$ принять некоторые гильбертовы пространства функций от x и y соответственно.

Следует отметить, что автор не рассматривает приложения полученных критериев к установлению самосопряженности конкретных краевых задач.

Ю. М. Березанский

2769. Интегрирование уравнения эволюции в банаховом пространстве. Като (Integration of the equation of evolution in a Banach space. Kato Tosio), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 2, 208—234 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$dx(t)/dt = A(t)\, x(t) + f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \quad (1)$$

где $x(t)$ и $f(t)$ при каждом t суть элементы некоторого банахова пространства, а $A(t)$ — замкнутый оператор (возможно, неограниченный) в этом пространстве. Среди условий, накладываемых на оператор $A(t)$, отметим еще следующее: область определения оператора $A(t)$ не зависит от t; при каждом $t \in [a, b]$ положительная полуось не содержит точек спектра $A(t)$, при этом

$$\| [I - \alpha A(t)]^{-1} \| \leqslant 1 \quad (\alpha \geqslant 0).$$

Если элемент x входит в область определения оператора $A(t)$, а $f(t)$ таково, что $[A(r) - I] f(t)$ сильно непрерывна по t хотя бы при одном r, то уравнение (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $x(a) = x$. Это решение дается формулой

$$x(t) = U(t, a)\, x + \int_a^t U(t, s) f(s)\, ds.$$

Здесь $U(t, s)$ $(a \leqslant s \leqslant t \leqslant b)$—линейный ограниченный оператор. Из его свойств, устанавливаемых в работе, укажем на следующие:

$$1)\ \| U(t, s) \| \leqslant 1; \quad 2)\ U(t, t) = 1;$$
$$3)\ U(t, r) = U(t, s)\, U(s, r).$$

Доказательства опираются на теорию полугрупп.

Г. П. Акилов

2770. Свойства выпуклости в некоторых модулях. Гика (Proprietăți ale convexității în anumite module. Ghika A ł.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, 3, № 11—12, 355—360 (рум.; резюме русс., франц.)

Пусть коммутативное кольцо A с единицей ε структурно упорядочено и удовлетворяет условиям:

(D) любой элемент $\alpha \in A$ представим в виде $\alpha = \nu\omega$, где ν^{-1} существует и $\omega^2 = \omega$;

(F_{III}) $\alpha + \sup(\beta, \gamma) = \sup(\alpha + \beta, \alpha + \gamma)$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in A$; (F_{IV}) если $\alpha > 0$, то $\alpha \sup(\beta, \gamma) = \sup(\alpha\beta, \alpha\gamma)$ для любых $\beta, \gamma \in A$.

Пусть $\alpha = \lambda\omega_1$ и $\beta = \mu\omega_2$, где $\lambda, \mu > 0$, λ^{-1}, μ^{-1} существуют, $\omega_1^2 = \omega_1$ и $\omega_2^2 = \omega_2$.

Тогда для элемента $\tau = \alpha + \beta + \varepsilon - \sup(\omega_1, \omega_2)$ существует τ^{-1}, $\tau > 0$ и $\alpha + \beta = \tau \sup(\omega_1, \omega_2)$.

Пусть E есть модуль относительно A. Доказывается совпадение двух следующих определений A-выпуклости множества $K \subseteq E$:

1) множество K A-выпукло, если вместе с $x, y \in K$ K содержит отрезок $|x, y|$ (все точки вида $\xi x + (\varepsilon - \xi) y$, где $0 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon$);

2) множество K A-выпукло, если $\alpha K + \beta K \subseteq (\alpha + \beta) K$ для любых $\alpha, \beta > 0$.

Две следующие леммы, доказанные референтом для выпуклых множеств в действительных векторных пространствах, переносятся на A-выпуклые множества в E:

Пусть C_1 и C_2 — A-выпуклые непересекающиеся множества.

1) Для любого $x \in E$ одно из множеств $K(C_1, x) \cap C_2$ и $K(C_2, x) \cap C_1$ пусто ($K(C, x)$ обозначает выпуклую оболочку множества C и точки x);

2) Существует по крайней мере одно разложение модуля E на два непересекающихся A-выпуклых множества E_1 и E_2 таких, что $C_1 \subseteq E_1$ и $C_2 \subseteq E_2$.

В статье имеется погрешность: величины $\eta = \beta\sigma^{-1}$ и $\zeta = \alpha\sigma^{-1}$, стр. 358, строка 12 снизу, не образует решения системы (3); требуемое решение образуют, например, величины $\eta = \sigma^{-1}(\beta + \varepsilon - \sup(\omega_1, \omega_3))$ и $\zeta = \alpha\sigma^{-1}$. *З. Л. Лейбензон*

2771. Совершенные пространства с мерой и W^*-алгебры. Такеда (Perfection of measure spaces and W^*-algebras. Takeda Ziro), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 1, 23—26 (англ.)

И. Сегалу (Segal I. E., Amer. J. Math., 1950, 51, 275—313) принадлежит следующее определение: локально компактное хаусдорфово пространство R с заданной на нем регулярной мерой r называется совершенным, если: 1) каково бы ни было непустое открытое множество G, обязательно $r(G) > 0$; 2) если e — характеристическая функция измеримого множества E, имеющего конечную меру, то существует непрерывная функция f, эквивалентная e и равная нулю на бесконечности.

В работе дается новое упрощенное доказательство следующей теоремы Сегала: всякое локализуемое пространство с мерой метрически эквивалентно некоторому совершенному пространству (пространство с мерой называется локализуемым, если кольцо метрических типов его измеримых подмножеств представляет собой полную структуру).

Указываются некоторые следствия теоремы Сегала. Предварительно устанавливается ряд свойств совершенных пространств. *С. Ф. Фомин*

2772 Д. О некоторых линейных уравнениях в гильбертовых пространствах. Харазов Д. Ф. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Тбилисск. матем. ин-т АН ГрузССР, Тбилиси, 1954

2773 Д. Об одном классе нелинейных уравнений. Ладыженский Л. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казань, 1954

См. также: 2485, 2678, 2680, 2723, 2743

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2774. О понятии дисперсии для многомерных распределений. Финетти (Sulla nozione di «dispersione» per distribuzioni a più dimensioni. Finetti Bruno de), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 587—596 (итал.)

2775. Преобразование характеристических функций посредством интеграции. Жиро (Transformation de fonctions caractéristiques par intégration. Girault Maurice), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 23, 2223—2224 (франц.)

Доказывается теорема: Если $\varphi(t)$ есть характеристическая функция, то и

$$\Phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s)\, ds$$

есть характеристическая функция.

Примечание референта. Эта теорема ранее доказана референтом. (Изв. Томского матем. ин-та, 1938, 2, 1—7), где, сверх того, показано, что $\Phi(t)$ есть характеристическая функция одновершинного закона и что имеет место и обратная теорема. *А. Я. Хинчин*

2776. Неотрицательные тригонометрические полиномы и некоторые рациональные характеристические функции. Лукач, Сас (Nonnegative trigonometric polynomials and certain rational characteristic functions. Lukacs Eugene, Szász Otto), J. Res. Mat. Bur. Standards, 1954, 52, № 3, 153—160 (англ.)

Рассматривается рациональная функция $\varphi(t)$, у которой все полюсы и все нули имеют одну и ту же мнимую часть a и, кроме того, все полюсы и все нули имеют один и тот же порядок. Пусть $-ia$, iv_j, $-iv_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) — полюсы, а $-iw_k$, $-i\overline{w}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) — нули $\varphi(t)$, где $v_j = a + ib_j$, $w_k = a + id_k$, $a > 0$, $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n$, $0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_m$, $m \leqslant n$ и все b_j — целые числа.

Тогда для того чтобы $\varphi(t)$ была характеристической функцией, необходимо и достаточно, чтобы для всех θ $g(\theta) = |C_{ik}|_1^n \geqslant 0$, где $C_{ik} = b_k^{2(i-1)}$ при $i \geqslant 2$, $C_{1k} = 1 - \lambda_k \cos b_k \theta$ и $\lambda_j = \prod_{k=1}^{m}(1 - b_j^2/d_k^2)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$.

Таким образом вопрос, когда функция $\varphi(t)$ будет характеристической, сводится к вопросу, при каких b_j, d_k, m и n тригонометрический полином $g(\theta)$ будет неотрицательным для любого θ. Рассматриваются четыре случая:

1) $b_j = j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $m = 1$,

2) $b_j = j$ $(j = 1,2, \ldots, n)$, $m = 2$,

3) $b_j = 2j - 1$ $(j = 1,2, \ldots, n)$, $n > m = 1$,

4) $b_j = 2j - 1$ $(j = 1,2, \ldots, n)$, $n > m = 2$,

и для каждого из них даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы $g(\theta) \geqslant 0$ при всех θ. Эти условия даны в виде неравенств. Например, в первом случае $g(\theta) \geqslant 0$ тогда и только тогда когда $2d_1^2 \geqslant n$. *В. П. Скитович*

2777. Центральная предельная теорема для m-связанных величин, асимптотически стационарных до второго порядка. Диананда (The central limit theorem for m-dependent variables asymptotically stationary to second order. Diananda P. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 2, 287—292 (англ.)

Последовательность случайных величин $\{X_i\}$ $(i = 1,2,\ldots)$ автор называет: 1) стационарной до второго порядка, если она стационарна в широком смысле по Хинчину, т. е. если математические ожидания

$$MX_i, \quad M(X_i X_{i+p}) \qquad (1)$$

конечны и не зависят от i; 2) асимптотически стационарной до второго порядка, если математические ожидания (1) имеют конечные пределы при $i \to \infty$. Определение m-связанной последовательности дано в работе автора (РЖМат, 1953, 828).

Доказывается, что для m-связанной, асимптотически стационарной до второго порядка последовательности $\{X_i\}$ с $MX_i = 0$, распределение величины $\frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma_{1=i}^{n} X_i$ асимптотически нормально, если

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon\sqrt{n}} x^2 dG_i \to 0, \quad n \to \infty,$$

где G_i — функция распределения X_i. В частности, если величины X_i имеют одинаковые распределения, получается обобщение известной теоремы Линдеберга—Леви. Указываются обобщения для векторных величин. Работа представляет собой дальнейшее развитие цитированной выше работы автора.

Н. А. Сапогов

2778. Предельные теоремы для сумм независимых слагаемых и цепей Маркова. Гнеденко Б. В., Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 1, 5—20

Обзорная статья. Постановка новых задач близка к имеющейся в статье А. Н. Колмогорова (РЖМат, 1955, 358).

Библиография, 56 названий. *Ю. В. Прохоров*

2779. Распространение леммы Бореля — Кантелли. Нэш (An extension of the Borel — Cantelli lemma. Nash Stanley W.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 165—167 (англ.)

Доказывается следующее обобщение леммы Бореля — Кантелли. Для того чтобы с вероятностью 1 осуществилось бесконечно много из событий $\{A_i\}$, $i = 1,2,\ldots$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{B_i\}$, $i = 1,2,\ldots$, в которой для конечного числа значений i $B_i = A_i$, а для остальных i $B_i = \overline{A_i}$ и при любом n $P\{B_1 \cap \cdots \cap B_n\} \neq 0$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n \mid B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}\}$$

расходился. *Р. Л. Добрушин*

2780. Расширения мер и теорема о сходимости мартингалов. Мой (Measure extensions and the martingale convergence theorem. Moy Shuteh Chen), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 902—907 (англ.)

Мартингалами называют последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ такие, что условное математическое ожидание ξ_n при любом условии, наложенном на предыдущие ξ_i $(i < n)$, конечно и совпадает с условным математическим ожиданием ξ_{n-1} при том же условии. Приведем несколько более общее определение мартингала. Пусть задана вероятностная мера P на борелевском поле $\mathcal{J}$ подмножеств множества Ω. Случайный процесс $\{\xi_n\}$ называется мартингалом, если $M\xi_n < \infty$ при всех n и имеется последовательность борелевских полей множеств $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{J}$ такая, что случайная величина ξ_n измерима относительно поля $\mathcal{J}_n$ и при $l > k$ и $B \in \mathcal{J}_k$ условное математическое ожидание $M\{\xi_l \mid B\} = M\{\xi_k \mid B\}$. (Подробнее о мартингалах см. Doob J. L., Stochastic proceses, New York, 1953). Основная теорема Дуба о сходимости мартингалов утверждает, что если $\sup_n M\{|\xi_n|\} < \infty$, то с вероятностью 1 существует $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \bar{\xi}$ (Doob J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1940, **47**, 455—486).

С другой стороны, Андерсен и Джессен (Andersen E. S., Jessen B., Kgl. videnskab. selskab. Mat. fis. medd., 1946, **22**, № 14) доказали следующую теорему теории меры: Пусть $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2 \subset \cdots$ — последовательность борелевских полей подмножеств непустого множества Ω, P — вероятностная мера, определенная на наименьшем борелевском поле $\mathcal{J}_\infty$, содержащем все $\mathcal{J}_n$, и φ — определенная на $\mathcal{J}_\infty$, вполне аддитивная функция множества. Обозначим через P_n и φ_n функции P и φ, рассматриваемые как функции, определенные лишь на $\mathcal{J}_n$. Пусть φ_n — абсолютно непрерывна относительно P_n и x_n — производная от φ_n относительно P_n (т. е. x_n — функция, измеримая относительно $\mathcal{J}_n$, и для любого

$B \in \mathcal{F}_n \int_B x_n dP = \varphi(B)$). Тогда: а) почти всюду на Ω существует $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, б) при этом $\bar{x}$ — производная относительно P абсолютно непрерывной части функции φ.

Дуб (см. цитированное соч.) заметил, что последовательность $\{x_n, \mathcal{F}_n\}$ образует мартингал и поэтому утверждение а) теоремы Андерсена — Джессена является следствием теоремы Дуба о сходимости мартингалов. В реферируемой работе изучаются свойства некоторого частного класса мартингалов и показывается, что теорема Дуба может быть получена как следствие теоремы Андерсена — Джессена.

Р. Л. Добрушин

2781. Релятивизация теории стохастических процессов. Лопушанский (Relativisierung der Theorie der stochastischen Prozesse. Łopuszański Jan), Acta phys. polon., 1953, 12, № 2, 87—99 (нем.)

В работе основные уравнения теории процессов Маркова приводятся к Лоренц-инвариантному виду. Плотности вероятности перехода $\rho(x, t; x_0, t_0)$ из (x_0, t_0) в (x, t), где x — пространственная переменная, а t — время, ставится в соответствие 4-вектор $I_\nu(x, t; x_0, t_0)$ $(\nu = 1, \ldots, 4)$, равный 0, если $|x - x_0| > c|t - t_0|$, и для которого $I_4(x, t; x_0, t_0) = i\rho(x, t; x_0, t_0)$. Уравнение Смолуховского — Колмогорова заменяется системой четырех Лоренц-инвариантных уравнений

$$I_\mu(x, t; x_0, t_0) = \int_\sigma I_\mu(x, t; \xi, \tau)\, I_\nu(\xi, \tau; x_0, t_0)\, dS_\nu(\xi, \tau), \tag{1}$$

где dS_ν есть 4-вектор, изображающий элемент гиперповерхности σ, ориентированный в направлении положительной оси времени, и σ расположено «позже» точки (x_0, t_0) и «ранее» точки (x, t). Условие нормировки плотности распределения приобретает вид

$$\int_\sigma I_\nu(\xi, \tau; x_0, t_0)\, dS_\nu(\xi, \tau) = 1. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) приводят к системе пяти инвариантных дифференциальных уравнений

$$I_4(x, t; x_0, t_0)\frac{\partial I_\nu(\xi, \tau; x, t)}{\partial ict} + I_j(x, t; x_0, t_0)\frac{\partial I_\nu(\xi, \tau; x, t)}{\partial x_j} = 0, \tag{3}$$

$$\nu = 1, \ldots, 4,$$

$$\frac{\partial I_4(\xi, \tau; x, t)}{\partial ic\tau} + \frac{\partial I_j(\xi, \tau; x, t)}{\partial \xi_j} = 0, \tag{4}$$

которые еще недостаточны для однозначного определения вектора I_ν. Далее анализируется дифференциальное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial \rho(\xi, \tau; x, t)}{\partial t} + a_i(x, t)\frac{\partial \rho(\xi, \tau; x, t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} b_{ik}(x, t)\frac{\partial^2 \rho(\xi, \tau; x, t)}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

и показывается, что оно совместимо с принципом относительности только тогда, когда $b_{ik}(x, t) = 0$ и

$$I_i(\xi, \tau; x, t) = \frac{1}{c} a_i(\xi, \tau)\, \rho(\xi, \tau; x, t),\ i = 1,2,3.$$

Последние соотношения опять приводят к уравнениям (3) и (4). *И. И. Гихман*

2782. Теория случайных функций. Дедебан, Мачадо (Las funciones aleatorias. Dedebant G., Machado E. A. M.), Meteoros, 1954, 4, № 1—2, 69—98 (исп.; резюме франц.)

В предыдущих номерах этого журнала было дано элементарное изложение теории случайных процессов.

В настоящей статье дается более полное и более строгое изложение математических оснований этой теории. *Из резюме авторов*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

2783. Усеченное распределение Пуассона. Плакетт (The truncated Poisson distribution. Plackett R. L.), Biometrics, 1953, 9, № 4, 485—488 (англ.)

Рассматривается усеченное распределение Пуассона, при котором результаты испытаний принимают значения $r = 1, 2, 3, \ldots$ с вероятностями

$$P_r = \lambda^r e^{-\lambda}\ [r!\,(1 - e^{-\lambda})].$$

Пусть N — общее число испытаний, а N_r — число тех испытаний, в которых появилось значение r.

В качестве несмещенной оценки для λ предлагается

$$\lambda^* = \sum_{r=2}^{\infty} rN_r / N.$$

Эффективность этой оценки стремится к единице, при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$, причем наименьшее значение эффективности равно 0,9536 (достигается при $\lambda = 1{,}355$).

Приводится также оценка для дисперсии λ^*, равная

$$(D\lambda^*)^* = (N\lambda^* + 2N_2)/N^2.$$

Указывается, что эта оценка является достаточно хорошей при $\lambda < 0{,}5$ и $\lambda > 4$. *С. Х. Туманян*

2784. Некоторая стохастическая модель и ее приложения. Буш, Мостеллер (A stochastic model with applications to learning. Bush Robert R., Mosteller Frederick), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 4, 559—585 (англ.)

Рассматривается последовательность экспериментов, в каждом из которых производится выбор между альтернативами A_1 и A_2. Пусть p_n — вероятность выбора A_1, а $1 - p_n$ — вероятность выбора A_2 при n-м испытании. Если при n-м испытании выбрано A_i, то при $n + 1$-м испытании A_1 выбирается с вероятностью $p_{n+1} = a_i + \alpha_i p_n$. Рассматривается вопрос об оценке параметров p_0, a_i и α_i в некоторых частных случаях. Эта модель прилагается к некоторым биологическим и психологическим вопросам.

В. А. Севастьянов

2785. **Замечание о состоятельности и наибольшем числе корней уравнения правдоподобия. Чанда** (A note on the consistency and maxima of the roots of likelihood equations. Chanda K. C.), Biometrika, 1954, **41**, № 1—2, 56—61 (англ.)

При некоторых предположениях доказаны существование и единственность состоятельных оценок максимального правдоподобия для случая, когда функция правдоподобия зависит от нескольких неизвестных параметров. Предположения и метод доказательства аналогичны предположениям и методу доказательства в случае одного неизвестного параметра (Крамер Г., Математические методы статистики, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1948, 544—547).
В. В. Петров

2786. **Моменты для сумм случайного числа случайных слагаемых. Винкельбауэр Карел,** Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 1, 93—108 (русс., резюме англ.)

Находятся (довольно громоздкие) выражения для старших моментов сумм случайного числа случайных величин. Для третьих моментов соответствующая формула была получена Вольфовицем (Wolfowitz J., Ann. Math. Statistics, 1946, **17**, 493—497).
Ю. В. Прохоров

2787. **Об улучшенных оценках средней арифметической. Олекевич** (On certain improved estimates of the mean. O pewnych ulepszonych ocenach średniej arytmetycznej. Olekiewicz M.), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1951, **A5**, 139—146 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.; резюме русс., польск.)

Наилучшей оценкой неизвестного параметра α распределения вероятностей случайной величины X объявляется такая функция выборочных значений α_0^*, для которой математическое ожидание $M(\alpha_0^* - \alpha)^2 = \min$. С этой точки зрения среди оценок вида $A\alpha^*$ наилучшей будет та, для которой $A = \alpha M(\alpha^*)/[M^2(\alpha^*) + D(\alpha^*)]$ (если только, конечно, A не зависит от α; в противном случае $A\alpha^*$ не будет оценкой). Например, среди оценок $A\bar{X}$ для математического ожидания μ случайной величины с дисперсией σ^2 наилучшей в указанном смысле будет оценка с $A = n/[n + (\sigma/\mu)^2]$ (в предположении, что σ и μ неизвестны, но $\sigma/\mu = \text{const}$).

Рассматриваются случаи нормального, биномиального и пуассоновского распределений. *А. С. Монин*

2788. **Уровень значимости для $\Sigma x^2/(\Sigma x)^2$, основанный на распределении Стьюдента. Сенгупта** (Significance level of $\Sigma x^2/(\Sigma x)^2$ based on Student's distribution. Sengupta J. M.), Sankhya, 1953, **12**, ч. 4, 363 (англ.)

Для проверки значимости отклонения выборочной средней от гипотетического среднего значения m нормальной совокупности рекомендуется вычислять отношение $(t^2 + N - 1)/Nt^2 = \Sigma x^2/(\Sigma x)^2$ где x — отклонения выборочных значений от m, N — объем выборки. Дана таблица значений $(t^2 + N - 1)/Nt^2$ для 5% и 1% уровней значимости при N от 2 до 60. Если наблюденное значение $\Sigma x^2/(\Sigma x)^2$ оказывается меньше соответствующего табличного значения, то расхождение с гипотезой m следует считать значимым. *А. С. Монин*

2789. **О стандартных ошибках при аппроксимации полиномами функций, заданных для неравноотстоящих значений аргумента. Гест** (On the standard errors in the fitting of polynomials to unequally spaced observations. Guest P. G.), Austral. J. Phys., 1953, **6**, № 2, 131—154 (англ.)

Пусть значения функции $y(x)$ измерены при n значениях аргумента x, разделенных неравными интервалами. Пусть полином степени p, аппроксимирующий функцию $y(x)$ в данных точках наилучшим образом в смысле наименьших квадратов, имеет вид $u_p(x) = \Sigma_{j=0}^{p} c_{pj} x^j$. Требуется вычислить стандартные ошибки коэффициентов c_{pj} и сглаженных значений $u_p(x)$.

Значения x располагаются в порядке возрастания величины. В случае нечетного n им приписываются целые номера $\varepsilon = -\frac{n-1}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, а в случае нечетного n — полуцелые номера $\varepsilon = -\frac{n-1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Последовательность $x(\varepsilon)$ аппроксимируется последовательностью $X(\varepsilon) = \Sigma_{j=1}^{3} k_j T_j(\varepsilon)$, где $T_j(\varepsilon)$ — ортогональные полиномы (T_j имеет степень j и старший коэффициент единицу). Вместо $X(\varepsilon)$ вводится последовательность $\xi(\varepsilon) = [X(\varepsilon) - k_0]\varphi = \varkappa_1\tau_1(\varepsilon) + \varkappa_2\tau_2(\varepsilon) + 2\varkappa_3\tau_3(\varepsilon)$, где $\tau_j(\varepsilon) = n^{1-j}T_j(\varepsilon)$. При этом коэффициенты $\varkappa_j$ оказываются одинакового порядка величины. При $\varphi = \left[k_1 + \frac{1}{10}(n-2)(n-3)k_3\right]^{-1}$ средний интервал между последовательными значениями $\xi(\varepsilon)$ оказывается равным единице. При этом $\varkappa_1 = 1 - 0{,}2\varkappa_3$. Параметры $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ характеризуют асимметрию и эксцесс последовательности $x(\varepsilon)$; для арифметической прогрессии они равны нулю.

Даются схемы и таблицы для вычисления коэффициентов ортогональных полиномов $T_j(\xi)$ и сумм $\Sigma_\xi T_j^2(\xi)$ по значениям параметров $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$; для вычисления стандартных ошибок коэффициентов c_{pj} и коэффициентов a_j разложения по ортогональным полиномам $u_p(\xi) = \Sigma_{j=0}^{p} a_j T_j(\xi)$, а также стандартных ошибок сглаженных значений $u_p(\xi)$ при $p = 1, 2, 3$.

Изучается ошибка, связанная с заменой последовательности $x(\varepsilon)$ сглаженной последовательностью $X(\varepsilon)$. При $p = 1, 2$ эта ошибка мала, но при $p = 3$ в некоторых случаях оказывается большой, и тогда к $X(\varepsilon)$ следует добавить ортогональные полиномы более высоких степеней. *А. С. Монин*

2790. **Таблицы математических ожиданий и дисперсий числа серий в случайных последовательностях с указанием вероятностей превышения математических ожиданий. Олекевич** (Tables of expected values and variances of numbers of runs in random sequences with probabilities of exceeding expected values. Olekiewicz M.), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1951, **A5**, 147—159 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.; резюме русс., польск.)

Для распределения общего числа R серий в «случайной» последовательности, состоящей из n элементов двух типов, например из $f_{\min}$ нулей и $f_{\max}$ единиц ($f_{\min} + f_{\max} = n$), табулируются следующие характеристики: 1) математическое ожидание $M(R)$,

2) $P\{R > M(R)\}$, 3) дисперсия $D(R)$, 4) дисперсия $D(R/n)$. Таблицы позволяют находить эти характеристики для $1 \leqslant f_{\min} \leqslant f_{\max} \leqslant 20$. Показывается, как можно использовать таблицу для проверки гипотезы случайности с помощью критерия знаков. *Н. В. Смирнов*

2791. Статистический спектральный анализ временных рядов, порожденных стационарными случайными процессами. Гренандер, Розенблатт (Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes. Grenander Ulf, Rosenblatt Murray), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 4, 537—558 (англ.)

Рассматриваются вещественные стационарные случайные последовательности $\{y_t\}$, $t = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, представимые в виде

$$y_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \xi_{t-n}, \qquad (1)$$

где $\Sigma |a_n|^2 < \infty$, а $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним значением и единичной дисперсией; в большей части статьи еще предполагается, что $M|\xi_n|^8 < \infty$. Пусть $I_N(\lambda)$ — периодограмма последовательности $\{y_t\}$:

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^{N} y_t e^{-it\lambda} \right|^2$$

и

$$\Phi_N = \int_0^\pi I_N(l)\, \varphi(l)\, dl, \quad \Phi = \int_0^\pi f(l)\, \varphi(l)\, dl,$$

где $f(l)$ — спектральная плотность $\{y_t\}$, предполагаемая существующей и непрерывно зависящей от l, а $\varphi(l)$ — произвольная ограниченная функция, имеющая самое большее конечное число точек разрыва. Доказывается, что $\lim\limits_{N\to\infty} M\Phi_N = \Phi$ (причем $M\Phi_N - \Phi = O(\log N/N)$, если $f(l)$ имеет ограниченную производную), так что Φ_N является асимптотически несмещенной оценкой Φ; этот результат несколько усиливает один результат предыдущей работы первого из авторов (Arkiv. mat., 1951, **1**, № 6, 503—531).

В частном случае, когда $\varphi(l)$ есть характеристическая функция интервала $[0, \lambda]$

$$\Phi = \int_0^\lambda f(l)dl \equiv F(\lambda), \quad \Phi_N = \int_0^\lambda I_N(l)\, dl \equiv F_N^*(\lambda); \qquad (2)$$

этот случай разбирается наиболее подробно. Основное содержание статьи составляет вычисление асимптотического распределения вероятностей для величины $\max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi} \sqrt{N}\, |F_N^*(\lambda) - F(\lambda)|$ и вывод отсюда некоторых критериев согласия для стационарных последовательностей, родственных известному критерию А. Н. Колмогорова. В качестве примеров полученных теорем приведем следующие две:

Теорема 8. Пусть $\{y_t\}$ — гауссовская стационарная последовательность, представимая в виде (1) и имеющая всюду положительную спектральную плотность $f(l)$ с интегрируемой второй производной. Тогда

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{ \max_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi} |F_N^*(\lambda) - F_N(\lambda)| < \alpha \sqrt{2\pi G^*/N} \right\} = \Delta(\alpha),$$

где

$$G^* = \frac{1}{4\pi N^2} \left[C_0^2 + 2 \sum_{\nu=1}^{[KN^\beta]} C_\nu^2 \right], \quad 0 < \beta < 1, \quad K > 0,$$

$$C_\nu = \sum_{t=1}^{N-\nu} y_t y_{t+\nu} \qquad (3)$$

и

$$\Delta(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \{\Phi[(2k+1)\alpha] - \Phi[(2k-1)\alpha]\} \qquad (4)$$

($\Phi(\alpha)$ — функция распределения Гаусса).

Теорема 9. Пусть $\{y_t\}$ — стационарная случайная последовательность, удовлетворяющая условиям, указанным в предыдущей теореме, и $F_{N_1}^*(\lambda)$, $F_{N_2}^*(\lambda)$ — оценки (2) спектральной функции $F(\lambda)$, построенные по двум независимо наблюденным отрезкам последовательности $\{y_t\}$, содержащим соответственно N_1 и N_2 членов. Если $N_1/N_2 \to c > 0$ и $N = 2N_1N_2/(N_1+N_2) \to \infty$, то

$$P\left\{ \max_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi} \sqrt{N}\, |F_{N_1}^*(\lambda) - F_{N_2}^*(\lambda)| > \alpha \sqrt{G_1^* + G_2^*} \right\} \to$$

$$\to 1 - \Delta(\alpha),$$

где G_1^* и G_2^* определяются с помощью формул (3) по первому и соответственно второму отрезкам последовательности $\{y_t\}$, а $\Delta(\alpha)$ есть функция (4).

В случае негауссовской стационарной последовательности $\{y_t\}$ также удается при сравнительно широких предположениях найти асимптотическое распределение вероятностей для величины $\max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi} \sqrt{N}\, |F_N^*(\lambda) - F(\lambda)|$; однако здесь это распределение задается более сложно.

Некоторые результаты настоящей работы были опубликованы авторами ранее (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1952, **38**, 519—521).

Библиография, 22 названия. *А. М. Яглом*

2792. Максимум математических ожиданий наибольшего значения и ранга. Гумбель (The maxima of the mean largest value and of the range. Gumbel E. J.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 1, 76—84 (англ.)

Установлена формула для максимума математического ожидания наибольшего выборочного значения $\bar{x}_n$ (n — объем выборки) при фиксированном математическом ожидании $\bar{x}$ и дисперсии σ исходного непрерывного распределения:

$$\bar{x}_n = \bar{x} + \sigma \frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}.$$

Этот максимум достигается для распределения

$$F(x, n) = \left[\frac{(n-1)(x-\bar{x})/\sigma}{n\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}},$$

которое исследуется. Построены графики функции распределения $F(x, n)$ и плотности при $n = 2, 3, 4, 5$.

Кроме того, определяется максимальное значение математического ожидания ранга выборки. Оно совпадает со значением, полученным ранее в предположении симметричности исходных распределений (Plackett R. L., Biometrika, 1947, **34**, 120—122).

В. С. Королюк

2793. Асимптотическое распределение серийных коэффициентов корреляции для авторегрессивных процессов с зависимыми остатками. Уокер (The asymptotic distribution of serial correlation coefficients for autoregressive processes with dependent residuals. Walker A. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 1, 60—64 (англ.)

Пусть стационарные последовательности случайных величин $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ соединены линейным соотношением

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i X_{t-i} = Y_t, \ \alpha_0 = 1,$$

причем последовательность $\{Y_t\}$ является m-связанной (Diananda P. H., РЖМат, 1953, 828) и обладает конечными моментами: $MY_t = 0$, $MY_t^4 < \infty$.

При этих условиях совместное распределение величин

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} (X_t X_{t+u} - M(X_t X_{t+u})), \ u = 0, 1, 2, \ldots, q,$$

будет асимптотически нормальным ($n \to \infty$) со средним 0 и конечной матрицей вторых моментов.

Метод доказательства аналогичен методу, примененному в цитированной работе Дианданда.

Н. А. Сапогов

2794. Приближенная трактовка свойств коррелограммы и частотограммы. Сарган (An approximate treatment of the properties of the correlogram and periodogram. Sargan J. D.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **B15**, № 1, 140—152 (англ.)

Изучаются коррелограммы и частотограммы (периодограммы) некоторых важных стационарных рядов. Рассматриваются последовательности независимых и нормальных величин $e_1, e_2, \ldots, e_n$ с $E(e_i)=0, D(e_i)=\sigma^2$. Коррелограмма для них задается рядом значений $E_k = \sum_{i=1}^{n-k} e_i e_{i+k}$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Они некоррелированы при разных индексах. Для автокорреляционного ряда $\{x_i\}$, порожденного уравнением $x_r + ax_{r-1} + bx_{r-2} = e_r$, члены коррелограммы $S_k = \sum_{r=1}^{n-k} x_r x_{r+k}$ удовлетворяют уравнению 4-го порядка в конечных разностях с правой частью E_k с точностью до членов с ограниченной дисперсией (тогда как S_k имеет дисперсию порядка n).

Для ряда $x_r = a\cos(\omega r + \alpha) + e_r$ коррелограмма состоит из членов $\frac{1}{2}a^2(n-k) + 2a\sum_{r=1}^{n} e_r \cos(\omega r + \alpha) \times \cos \omega k + E_k +$ члены с ограниченной дисперсией. Далее разбираются коррелограммы рядов, получаемых из $\{e_i\}$ скользящим суммированием. Все полученные формулы имеют тенденцию к обнаружению «ложных периодов» при анализе коррелограмм. Далее изучаются периодограммы ряда $\{e_i\}$, автокорреляционного ряда 2-го порядка и ряда скользящих средних из $\{e_i\}$. Они определяются, как $S^2 = S^2(\omega) = \frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} S_k \cos \omega k + \frac{1}{n^2} S_0$. Для ряда $\{e_i\}$ они интересны тем, что $S^2(\omega_1)$, и $S^2(\omega_2)$ независимы, если $\omega_1 - \omega_2$ кратно $2\pi/n$. На этом основан критерий Фишера для определения принадлежности наблюдений к ряду типа $\{e_i\}$. Даются некоторые качественные соображения на основе выведенных формул. В качестве примера разбирается ряд цен на пшеницу, аппроксимируемый автокорреляционным рядом $x_r = 0{,}73\, x_{r-1} - 0{,}31\, x_{r-2} + e_r$.

Ю. В. Линник

2795. Аффинно-разрешимые планы со сбалансированными неполными блоками и несингулярные, делимые на группы, планы. Шрикханде (Affine resolvable balanced incomplete block designs and non-singular group divisible designs Shrikhande S. S.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1954, **5**, № 19, 139—141 (англ.)

2796. Замечание о планах со сбалансированными неполными блоками. Спротт (A note on balanced incomplete block designs. Sprott D. A.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 3, 341—346 (англ.)

2797. Замечание о частично сбалансированных планах. Зилен (A note on partially balanced designs. Zelen Marvin), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 3, 599—602 (англ.)

2798. Роль статистики в научном исследовании. Кендалл (The role of statistics in scientific research. Kendall M. G.), Virginia J. Sci., 1954, **5**, № 3, 119—130 (англ.)

2799. К. Кривые плотности и корреляция. Элдертон (Frequency curves and correlation. 4-th edition, 1953, Elderton William Palin, XI + 272 pp. Cambridge University Press) (англ.)

Четвертое издание учебника, вышедшего первым изданием в 1906 г. По сравнению с третьим изданием (1938 г.) существенных изменений не сделано. В книге 13 глав (I. Введение. II. Плотность распределения. III. Метод моментов. IV. Пирсоновская система кривых плотности. V. Вычисление параметров распределения по известным моментам. VI. Сравнение различных систем кривых плотности. VII. Корреляция. VIII. Теоретические распределения. Ложная корреляция. IX. Корреляция количественно неизмеримых признаков. X. Стандартные ошибки. XI. Критерий согласия. XII. Корреляционное отношение. Связанность. XIII. Частная корреляция) и 9 приложений, содержащих вспомогательные и справочные сведения. Наибольший интерес представляют полное описание системы кривых Пирсона (гл. IV и V), которое редко дается в учебной литературе, и изложение поправочных формул для моментов при группировке данных (Приложение 1).

А. А. Петров

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

2800. Статистическая физика линейной полимерной молекулы. Волькенштейн М. В., Птицын О. Б., Успехи физ. наук, 1953, **49**, № 4, 501—568

Реферируемая статья представляет собой обзор новой области физической статистики — статистики линейных полимерных молекул, созданной за последние годы трудами советских и зарубежных физиков и химиков (линейными полимерами являются, например, каучук и резина). В статье рассматривается простейший случай изолированной поли-

мерной молекулы. Этот случай осуществляется практически в сильно разбавленном растворе полимера.

Схематически линейная полимерная молекула может быть описана как цепочка из n отрезков (звеньев) $\{H_i = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ в трехмерном пространстве, причем конец i-го звена A_i совпадает с началом $i+1$-го. Число звеньев n достигает нескольких тысяч. В процессе хаотического теплового движения молекула непрерывно меняет свою конфигурацию; в множестве всевозможных цепочек возникает распределение вероятностей P, через которое выражаются основные физические характеристики полимера.

Рассматривается несколько моделей, задающих распределение вероятностей P. Эти модели соответствуют различным степеням приближения к реальной обстановке. Во всех моделях предполагается, что все звенья $\{H_i\}$ имеют одинаковую длину l. Направлением γ_i звена H_i назовем единичный вектор, параллельный вектору $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Распределение P, очевидно, определяется заданием совместного распределения всех направлений γ_i.

Модель А: направления γ_i имеют равномерное сферическое распределение и независимы. Модель Б: направление γ_i звена H_i образует постоянный угол α, называемый углом валентности, с направлением γ_{i-1}, т. е. принадлежит конусу направлений $k(\gamma_{i-1})$. При данном γ_{i-1} распределение γ_i на конусе $k(\gamma_{i-1})$ является равномерным и не зависит от направлений $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-2}$. Модель В: направление γ_i принадлежит конусу направлений $k(\gamma_{i-1})$.

Пусть β направление, лежащее в пересечении конуса $k(\gamma_{i-1})$ и плоскости, проходящей через γ_{i-1} и γ_{i-2}. Если на конусе $k(\gamma_{i-1})$ ввести угловую координату φ, отсчитываемую от направления β, то φ имеет некоторое постоянное распределение вероятностей, не зависящее от направлений $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}$.

Раздел 2 реферируемой работы посвящен изучению длины L_n цепочки, т. е. длины вектора $\overrightarrow{A_0A_n}$. Для модели A вектор $\overrightarrow{A_0A_n}$ будет, очевидно, иметь при $n \to \infty$ нормальное сферическое распределение. Отсюда нетрудно получить предельное распределение для L_n. Средняя квадратичная длина молекулы $\overline{L_n} = l\sqrt{n}$. Указывается, что в условиях моделей Б и В при больших R векторы $\overrightarrow{A_1A_k}$, $\overrightarrow{A_kA_{2k}}$, ... практически независимы и на этом основании делается заключение, что предельное распределение для L_n будет тем же, что и в модели А; изменится лишь величина $\overline{L_n}$. Отметим, что для модели Б это утверждение было строго доказано Мораном (Moran P. A. P., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1948, 44, 342—344), опиравшимся на результаты С. Н. Бернштейна о суммах слабо зависимых величин.

Распределение вероятностей для длины цепочки, основанное на нормальном приближении, дает хорошее соответствие с точным распределением лишь для длин цепочки порядка $\overline{L_n}$. Приводится полученное Куном и Грюном уточненное распределение, годное и для больших длин цепочки. Вывод этого распределения основан на некоторых произвольных допущениях. Отметим, что для модели А формула Куна и Грюна может быть получена из известного крамеровского уточнения центральной предельной теоремы (Крамер Г., Успехи матем. наук, 1944, **10**, 166).

В разделе 3 изучаются геометрические характеристики цепочки (средние «длина, ширина и высота», средний момент инерции и т. п.). Рассуждения проводятся по существу в предположении, что распределение P совпадает с распределением в множестве траекторий трехмерного броуновского движения.

В разделе 4 выводится принадлежащая авторам статьи и Т. М. Бирнштейн асимптотическая формула для $\overline{L_n}$ в общей модели В. Рассуждения разделов 3 и 4 могут быть без труда сделаны вполне строгими.

Модели А, Б и В дают лишь некоторое приближение к реальному распределению конфигураций молекулы. Повидимому, особенно существенное отклонение дает так называемый «объемный эффект», состоящий, грубо говоря, в том, что реальные цепочки имеют конечный объем и не могут самопересекаться. Раздел 6 посвящен обзору многочисленных попыток учесть этот «объемный эффект» и найти предельное распределение для длины молекулы или хотя бы асимптотику ее среднего значения. В частности, обсуждается вопрос о том, останется ли предельное распределение нормальным. Все эти попытки основаны на рассуждениях, которые остались для референта не вполне ясными.

Реферируемая статья может быть рекомендована для первого ознакомления с важной и быстро развивающейся отраслью физической статистики, еще ожидающей своей математической разработки. Библиография, 125 названий. *Р. Л. Добрушин*

2801. Статистическая форма нитчатых молекул. I. Распределение направлений в персистентной модели. Пород, Смола (Die statistische Gestalt von Fadenmolekülen. I. Die Richtungsverteilung im Persistenzmodell. Porod Günther, Smola Friedrich), Acta phys. austriaca, 1953, 8, № 1, 63—88 (нем.)

Работа посвящена теории линейных полимерных молекул (см. реф. 2800). Предполагается, что направление $n+1$-го звена цепочки при заданном направлении n-го звена не зависит от направления предыдущих звеньев и что задана (не зависящая от n) плотность распределения $W(\vartheta_n, \varphi_n)$ направления $(n+1)$-го звена относительно направления n-го (ϑ_n и φ_n — сферические координаты с началом в конце n-го звена и осью, совпадающей с направлением этого звена). Точнее, $W(\vartheta_n, \varphi_n)(4\pi)^{-1}\,d\sigma$ — вероятность того, что направление входит в телесный угол $d\sigma$ с центром в направлении ϑ_n, φ_n. Такую модель авторы называют персистентной и ставят задачу найти плотность распределения $W_n(r, \vartheta, \varphi)$ положения n-й вершины цепочки (конца n-го звена); через r, ϑ и φ — сферические координаты с началом в начальной точке цепочки и осью, совпадающей с направлением первого звена. Предполагается далее, что функция W не зависит от φ_n, тогда и искомое распределение будет обладать осевой симметрией. Формулируется утверждение, что лежащие на оси средние значения случайных векторов, длины единица

и с плотностью $W_n(r, \vartheta)$, стремятся при $n \to \infty$ к некоторой точке, расстояние которой от начала является параметром модели, характеризующим ее «запутанность». Однако в реферируемой работе рассматривается лишь плотность вероятностей $W_n(\vartheta)$ направления n-го звена ломаной. Устанавливается, что если под сферической сверткой функций $A(\vartheta)$ и $B(\vartheta)$ понимать

$$C(\vartheta, \varphi) = \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} A(\vartheta') B(\alpha) \sin \vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi',$$

где

$$\cos \alpha = \cos \vartheta' \cos \vartheta + \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos (\varphi' - \varphi),$$

то $W_n(\vartheta)$ есть n-кратная сферическая свертка $W(\vartheta)$ с самой собой. Если положить

$$W(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k(\cos \vartheta), \quad \alpha_0 = 1$$

(P_k — полиномы Лежандра), то

$$W_n(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{\alpha_k}{2k+1} \right)^n P_k(\cos \vartheta).$$

Подробно рассматриваются три примера: плотность $W(\vartheta)$ постоянна на полусфере, плотность $W(\vartheta)$ постоянна в сферическом поясе $\vartheta_0 - \delta < \vartheta < \vartheta_0 + \delta$, и предельный случай последнего распределения при $\delta \to 0$ ($W(\vartheta)$ — импульсная функция). *В. И. Левин*

2802. **Оптика и теория стохастических процессов. Винер** (Optics and the theory of stochastic processes. Wiener Norbert), J. Opt. Soc. America, 1953, **43**, № 4, 225—228 (англ.)

2803. **О некоторых проблемах, связанных с прибором Гальтона. Меддьеши** (A galton féle deszkával kapcsolatos néhány problémáról. Meddyessy Pál), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1952, **1**, 165—174 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (венг.; резюме русс., франц.)

2804. **Определение оптимального числа оборотов ткацких машин при помощи теории вероятностей. Секей** (Szövögépek optimális fordulatszámának valószínüségszámitási alapon való meghatározása, többgépes rendszer esetén. Székely Gábor), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1952, **1**, 147—156 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (венг.; резюме русс., франц.)

В случае повышения числа оборотов работающая текстильная машина производит больше продукции, но в то же время повышается и вероятность обрыва нити, следовательно, время простоя машин тоже повышается. Оптимальное число оборотов, т. е. число оборотов, при котором количество произведенной продукции максимально, можно определить методами теории вероятностей. Работа знакомит с теоретической работой и опытами на заводах, проведенными Институтом прикладной математики Венгерской академии наук. *Резюме автора*

2805. **«О вероятностях, связанных с воздушным траффиком в аэропортах». Заметка к статье Шанталя. Батикль** («Sur des probabilités relatives au trafic aérien dans les aéroports». Note sur l'article de M. Chantal. Baticle E.), Travaux, 1954, **38**, № 233, 156—158 (франц.)

По утверждению автора, результаты одноименной статьи Шанталя (РЖМат, 1954, 3782) могут быть получены с помощью значительно более простых соображений, излагаемых в настоящей статье в терминах траффика морских портов. По мнению референта, эти соображения ошибочны в ряде пунктов. Основная ошибка состоит в том, что при расчете вероятности иметь данное число занятых причалов, события, состоящие в занятости отдельных причалов, неявно предполагаются взаимно независимыми. Это немедленно дает для искомых вероятностей (неверные) формулы Бернулли вместо (верных) формул Эрланга, имеющихся у Шанталя, и имеет своим следствием ошибочность всех дальнейших расчетов.

К статье прилагаются: первый ответ Шанталя, новая заметка Батикля и новый ответ Шанталя. Не останавливаясь на вышеуказанных ошибках, Шанталь сосредоточивает свою критику на том, что Батикль не учитывает закона распределения длительности занятия причала; вследствие этого выводы его не могут иметь общего значения, так как известно, что вычисляемые им величины фактически зависят от этого закона. *А. Я. Хинчин*

2806. **Вероятности, связанные с траффиком морских портов. Батикль** (Probabilités relatives au trafic des ports maritimes. Baticle E.), Travaux, 1954, **38**, № 237, 626—627 (франц.)

Статья примыкает к полемике автора с Шанталем (см. реф. 2805). Цель автора — дать более детальное обоснование тех же формул. Основная ошибка — неявное допущение независимости заведомо зависимых событий — сохраняется в полной мере. Добавленная автором предпосылка о том, что «причалы не подвергаются дискриминации» (т. е. что выбор свободного причала производится случайно), ничего в этом не меняет. *А. Я. Хинчин*

2807. **Математические основы стандартизации и контроля качества продукции массового производства. Скаков А. И.**, Завод. лаборатория, 1953, № 6, 708—721

Рассматривается вопрос о прямых и косвенных критериях качества продукции и степени надежности разбраковки по косвенному признаку в зависимости от величины корреляции между прямым и косвенным критериями; описываются различные системы контроля качества. Более детально освещаются задачи выборочного контроля по количественному признаку.

Формулы (31) и (32) записаны в условных обозначениях, смысл которых не разъяснен. *Н. В. Смирнов*

См. также: 2485, 2514

ГЕОМЕТРИЯ

2808. Построение нормали эллипса с помощью комплексного уравнения. Фазекаш (Ellipszis-normális szerkesztése, komplex egyenlet alapján. Fazekas Ferenc), Mat. lapok, 1953, **4**, № 3—5, 124—125 (венг.; резюме русс., франц.)

Исходя из комплексного уравнения эллипса $z = ae^{it} + be^{-it}$ и учитывая, что $z_n = -iz = ae^{it} - be^{-it}$, автор показывает простое построение нормали эллипса. *Резюме автора*

2809. Теорема М. Бауэра о геометрических конструкциях. Облат (Bauer Mihály tétele a geometrial szerkesztésekröl. Oblát Richárd), Mat. lapok., 1953, **4**, № 2—3, 108—112 (венг.; резюме русс., франц.)

2810. Размещение окружностей на шаре. Молнар (Körök elhelyezese gömbön. Molnar Jozsef), Mat. lapok, 1953, **4**, № 2—3, 113—123 (венг.; резюме русс., нем.)

2811. Полуправильные многоугольники и присоединенные многоугольники. Бини (Poligoni semiregolari e poligoni aggiunti. Bini Umberto), Archimede, 1953, **5**, № 3, 103—108 (итал.)

Как известно, полуправильным называется многоугольник, у которого все углы равны между собою, а стороны не равны (*PSA*) или же все стороны равны между собою, а углы не равны (*PSL*).

В многоугольнике *PSA* с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ и сторонами $A_1A_2 = A_3A_4 = \ldots = 2a$, $A_2A_3 = A_4A_5 = \ldots = 2b$, где $a \neq b$ независимы, и фиксировано направление на контуре, каждый из внутренних углов *PSA* будет равен

$$\frac{180^\circ}{n} \text{ или } (n-1)\frac{180^\circ}{n},$$

смотря по тому, будет ли многоугольник *PSA* самопересекающимся (intrecciato) или нет. Первая из этих формул неправильна. Достаточно разделить окружность на 10 равных частей, соединить первую точку деления со второй, вторую с пятой, пятую с шестой и т. д., чтобы получить звездчатый десятиугольник *PSA* с внутренним углом в 108°.

Далее автор на каждой стороне фиксированного направления контура *PSA* строит правильный $2n$-угольник (обыкновенный или звездчатый h-го рода), которые называет присоединенными (aggiunti) многоугольниками *PSA*. Обозначая через O_s центр присоединенного многоугольника стороны A_sA_{s+1}, он ищет те условия, при которых центры O_s определяют правильный обыкновенный многоугольник $[O]$.

Для несамопересекающегося *PSA* с $2n$ сторонами центры присоединенных (обыкновенных или звездчатых) многоугольников *PSA* образуют многоугольник *PSL*. Центры присоединенных многоугольников *PSA* могут быть вершинами правильного обыкновенного многоугольника тогда и только тогда, когда угол при основании равнобедренного треугольника $A_sA_{s-1}O_s$, $\varepsilon = \frac{90^\circ}{n}$.

Отсюда:

a) В прямоугольнике и только в прямоугольнике центры присоединенных квадратов являются вершинами квадрата.

b) Центры присоединенных звездчатых многоугольников рода $h = n - 1$ многоугольника *PSA* являются вершинами правильного обыкновенного многоугольника.

c) Центры присоединенных (обыкновенных или звездчатых) многоугольников *PSA* с $2n$ сторонами образуют правильный многоугольник с n сторонами тогда и только тогда, когда ε удовлетворяет условию:

$$a \sin\left(\varepsilon - \frac{180^\circ}{n}\right) = b \sin \varepsilon. \qquad \textit{Н. Г. Гаспарян}$$

2812. Об одном геометрическом месте, связанном с эллипсом или гиперболой. Фог (Om et geometrisk sted ved ellipse og hyperbel. Fog David), Nord. mat. tidskr., 1953, **1**, № 4, 161—164 (норв.)

Отыскание уравнения геометрического места точек путем введения параметра и его исключения из полученных уравнений может оказаться несостоятельным. Это иллюстрируется на следующем примере. Ищется геометрическое место точек, из которых можно провести к эллипсу $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ касательные, параллельные паре сопряженных диаметров. Уравнение касательной с угловым коэффициентом α: $y = \alpha x \pm \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}$. Отсюда $\alpha_1\alpha_2 = -(y^2-b^2)/(x^2-a^2)$. Условие сопряженности: $\alpha_1\alpha_2 = -b^2/a^2$. Исключение параметра α приводит к уравнению искомого геометрического места $x^2/2a^2 + y^2/2b^2 = 1$, которое и дает полное решение задачи. Но тот же прием, примененный к гиперболе $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, приводит к уравнению $x^2/2a^2 - y^2/2b^2 = 1$. Однако для гиперболы задача невозможна и ни одна точка полученного геометрического места не обладает требуемым свойством. *Я. П. Бланк*

2813. О точках Фейербаха в треугольнике. Тебо (On the Feuerbach points of a triangle. Thebault V.), Math. Student, 1953, **21**, № 3—4, 109—111 (англ.)

Выводится условие, которому должны удовлетворять четыре точки, расположенные на окружности девяти точек, чтобы быть точками Фейербаха, т. е. точками касания этой окружности с окружностью, вписанной в треугольник и с вневписанными окружностями. *С. И. Зетель*

2814 К. Курс геометрии. Сен (Course of geometry. Sen R. N., 348 pp., Calcutta Univ. Press., 1953, 12 Rs.). Cumul. Book Index., 1954, **57**, № 3, 86 (библ.)

2815 К. Краткий курс аналитической геометрии. Ефимов Н. В. (Учебник для вузов), изд. 2-е, 256 стр. с черт., М., Гостехиздат, 1954, 6 р. 35 к.

Новое значительно переработанное издание книги автора под тем же названием. Особой переработке подверглись главы о кривых второго порядка, в частности об упрощении общего уравнения кривых второго порядка. *М. К. Керимов*

2816 К. **Сборник задач по аналитической геометрии. Клетеник Д. В.,** Учеб. пособие для вузов, изд. 2-е, перераб. 240 стр. с черт., М., Гостехиздат, 1954, 5 р. 45 к.

Второе издание задачника, значительно переработанное и дополненное. Увеличено количество задач (до 1261). Включено большое число комбинированных и сложных задач. Благодаря этому стало возможным использование задачника в качестве пособия для втузов с повышенной программой по математике. Новое издание приспособлено для параллельной работы не только с курсом аналитической геометрии Н. В. Ефимова, но и с курсом И. И. Привалова.

Задачи расположены в следующем порядке: Часть 1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости; уравнение линии; линии первого порядка; геометрические свойства линий второго порядка. Упрощение общего уравнения линии второго порядка. Уравнения некоторых кривых, встречающихся в математике и ее приложениях. Часть 2. Некоторые простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве; векторная алгебра; уравнение поверхности и уравнения линии; уравнение плоскости; уравнения прямой. Уравнения поверхностей второго порядка. Элементы теории определителей. Задачник снабжен ответами и указаниями к задачам. *М. К. Керимов*

2817К. **Аналитическая геометрия. Привалов И. И.** (Учебн. для втузов), изд., 19-е, 300 стр., М., Гостехиздат, 1954, 6 р. 90 к.

См. РЖМат, 1954, 3798К.

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

2818. **Индикатриса уравнения центра в кеплеровом движении. Мазотти** (Linea indicatrice della equazione del centro nel moti kepleriani. Masotti Arnaldo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 531—533 (итал.)

Дается краткое изложение опубликованной ранее работы автора (Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1952, 85, 415—445). Указывается способ построения кривых, позволяющих графически находить, в кеплеровом эллиптическом движении, углы $V - E$ и $V - M$. *Ю. Рябов*

2819. **Об одном обобщении теоремы Дроз — Фарни. Гурматай** (Sur une généralisation du théorème de Droz — Farny. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1953, 62, № 8—9—10, 293—296 (франц.)

При помощи комплексных координат доказывается теорема: Центры тяжести четверок точек пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых a и b, проходящих через произвольную точку A плоскости, с прямыми пар, образованных сторонами и соответствующими высотами треугольника, лежат на одной прямой Δ.

В частности, когда точка A совпадает с ортоцентром треугольника, получается теорема Дроз — Фарни.

Если прямые a и b вращаются вокруг точки A, то прямая Δ, перемещаясь, огибает коническое сечение, фокусами которого являются точка A и центр окружности девяти точек (O_9); большая ось его равна радиусу описанной окружности, а квадрат малой оси (с точностью до знака) — степени точки A относительно окружности (O_9). В том случае, когда точка A лежит на окружности (O_9), прямая Δ проходит через точку A.

Рассматривается геометрическое место точек A, когда направление прямых a и b фиксировано, а переменная прямая Δ проходит через несобственную или собственную точку. *К. К. Мокрищев*

2820. **Скалярная форма уравнений Якоби в вариационном исчислении. Рунд** (The scalar form of Jacobi's equations in the calculus of variations. Rund Hanno), Ann. mat. pura ed appl., 1953, 35, 183—202 (англ.)

Из дифференциальных уравнений для геодезического отклонения в n-мерном пространстве Финслера автор получает дифференциальное уравнение для длины вектора отклонения, определяемой с помощью евклидовой метрики, ассоциированной с касательным элементом, в предположении, что этот вектор трансверсален касательному направлению. Далее рассматривается геометрический смысл скалярного дифференциального инварианта, являющегося коэффициентом в этом уравнении, в связи с геометрией двумерной поверхности в пространстве Финслера.

Считая, что направление вектора вариации вдоль геодезической задано, автор рассматривает вторую вариацию длины дуги как функционал от длины вектора вариации. Уравнение Эйлера для полученной таким образом вспомогательной вариационной задачи совпадает с дифференциальным уравнением для длины вектора геодезического отклонения. *В. В. Вагнер*

2821. **Основные формулы статики упругих тел в общих криволинейных координатах. Кеттнер** (Elastostatische Grundformeln für allgemeine krummlinige Koordinaten. Krettner J.), Öster. Ingr-Arch., 1953, 7, № 1, 11—21 (нем.; резюме англ., франц.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2822. **Невозможность конфигурации Фано на проективной плоскости с восемью точками на каждой прямой. Пирс** (The impossibility of Fano's configuration in a projective plane with eight points per line. Pierce William A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 908—912 (англ.)

Конфигурация Фано — полный четырехугольник с пересекающимися диагоналями. Проективная плоскость с восемью точками на каждой прямой содержит 57 точек. Если в этой плоскости реализуется конфигурация Фано, то в ней будет семь исходных точек и семь исходных прямых. На каждой из этих прямых — по три исходных точки. Кроме того, на каждой из них должно быть еще по пять, т. е. всего еще 35 точек. Остается разместить 15 точек («экстра-точки»). Они должны разместиться на новых прямых, проходящих по пять через каждую из исходных точек. Каждая новая прямая встречает в исходной точке три исходные прямые и, кроме того, встречает четыре исходные прямые в четырех точках, среди которых должны быть три экстра-точки.

Эта задача сводится к задаче Киркмана (1950 г.): каким образом пятнадцать школьниц могут гулять группами по три ежедневно в течение недели так, чтобы каждые две школьницы попадали вместе в одну группу ровно один раз из семи? Пять новых прямых, проходящих через исходную точку — это пять групп гуляющих, экстра-точки,— это школьницы, а семь исходных точек соответствуют семи дням недели.

Основываясь на том, что все решения задачи Киркмана известны, автор показывает, что ни одно из них не дает возможности построить конфигурацию Фано, так как исследование возникающих инциденций приводит к противоречию.

Рассмотренная задача связана с утверждением, что единственная проективная плоскость с восемью точками на каждой прямой — это дезаргова плоскость (РЖМат, 1955, 392). *Н. М. Бескин*

2823. **Новый способ получения гиперболической тригонометрии с помощью орисферы. Сас** (A hiperbolikus trigonometria új előállítása a paraszféra felhasználásával. Szász Pál), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, **3**, № 4, 521—526 (венг.)

Пусть $\Pi(a)$ — угол параллельности, соответствующий расстоянию a, а $p(a)$ — дуга орицикла с высотой a. Уже Я. Больаи доказал, что

$$p(a)\,\mathrm{tg}\,\Pi(a) = k \qquad (1)$$

есть постоянная, не зависимая от расстояния a. В. Ф. Каган (см. Лобачевский Н. И., Геометрические исследования по теории параллельных линий, М., Изд-во АН СССР, 1945) доказал теорему (1) непосредственно, с применением орисферы, затем, используя без доказательства предложение о пределе отношения дуги орицикла к своей хорде, дал классическое уравнение

$$\mathrm{tg}\,\frac{\Pi(a)}{2} = e^{-a/k} \qquad (2)$$

и получил гиперболическую тригонометрию.

В реферируемой статье уравнения (1) и (2) выводятся непосредственно. *В. Т. Базылев*

2824. **Непосредственное получение гиперболической тригонометрии с применением площади. Сас** (A hiperbolikus trigonometria közvetlen előállítása a tér felhasználásával. Szász Pál), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, **3**, № 4, 535—559 (венг.)

Автор устанавливает основные соотношения гиперболической тригонометрии, отправляясь от аксиомы Лобачевского и понятия дефекта треугольника. *В. Т. Базылев*

2825. **Новый способ получения гиперболической тригонометрии в плоскости при помощи классических вспомогательных средств. Сас** (A hiperbolikus trigonometria új sikbeli előállítása a klasszikus segédeszközökkel. Szász Pál), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, **3**, № 4, 527—533 (венг.)

Используя теорему о том, что на концентрических орициклах, находящихся на расстоянии x один от другого, отношение какой-либо внешней дуги $\overset{\frown}{AB}$ к соответствующей внутренней дуге $\overset{\frown}{A'B'}$ есть

$$\overset{\frown}{AB} / \overset{\frown}{A'B'} = e^{x/k},$$

где k — параметр гиперболической геометрии, автор строит гиперболическую тригонометрию. См. В. Ф. Каган, Основания геометрии, I, гл. 7, М., ГИТТЛ, 1949. *В. Т. Базылев*

2826 **К. Начертательная геометрия. Глаголев Н. А.** (Учебник для гос. ун-тов и пед. ин-тов), изд. 3-е, перераб. и дополн. В. В. Рыжковым, 220 стр., М., Гостехиздат, 1953, 6 р. 20 к.

Наибольшей переработке в этом издании подверглась первая глава. Книга написана на высоком теоретическом уровне. Имеется много задач с решениями.

Содержание: гл. 1. Геометрические основы начертательной геометрии; гл. 2. Метод Монжа; гл. 3. Метод аксонометрического проектирования; гл. 4. Линейная перспектива. *М. К. Керимов*

2827 **К. Обобщенное сложное отношение. Фурман** (Verallgemeinerte Doppelverhältnisse. Fuhrmann Arved, VI + 41 S., Bonn. Math.-Naturwiss. F., 1953), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 17, 1432 (библ.)

2828 **Д. О длине и повороте кривой и о площади поверхности. Решетняк Ю. Г.** Автореф. дисс. канд.физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1954

2829 **Д. Построение некоторых многозначных соответствий между точками двух плоскостей. Солнцева Т. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1954

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2830. **Противоположность между непрерывным и дискретным и алгебраическая геометрия. Сегре** (Il contrasto fra continuo e discontinuo e la geometria algebrica. Segre Beniamino), Archimede, 1953, 5, № 6, 221—225 (итал.)

Понятие непрерывности пространства и времени противопоставляется понятию числа и связанным с ним понятиям арифметики и комбинаторики.

Эта противоположность между непрерывным и дискретным кратко прослеживается на ряде фактов из истории математики и физики.

Противопоставляя алгебраическую структуру топологической, автор отмечает плодотворность их совместного применения в алгебраической геометрии. *Я. П. Бланк*

2831. **Об одной линейчатой поверхности четвертого порядка. Севрен** (Sur une surface réglée du quatrième ordre. Sevrin A.), Mathesis, 1953, 62, № 8—9—10, 303—314 (франц.)

Подробно изучается линейчатая поверхность (S), образованная прямой AB, скользящей по двум перпендикулярным (скрещивающимся) прямым Δ и Δ_1, так, что отрезок ее AB между этими двумя прямыми сохраняет постоянную длину $2d$. Это алгебраическая поверхность четвертого порядка $x^2/(z+a)^2 + y^2/(z-a)^2 = (d^2-a^2)/a^2$, где $2a$ отрезок общего перпендикуляра Δ и Δ_1. Объем тела, ограниченного (S) и прямыми Δ, Δ_1, равен $V = \frac{4}{3}\pi a(d^2-a^2)$.

Стрикционная линия (S) будет алгебраической кривой шестого порядка, проекция которой на плоскость xoy представляет астроиду. Одно семей-

ство асимптотических линий получается пересечением (S) с коноидами $x(z-a)^3+c^2y(z+a)^3=0$, $c=\text{const}$; полная кривизна дается формулой $K=-1/a^2\sin^2 v$, причем $v=\text{const}$ — семейство образующих. Сумма отношений главных радиусов кривизн (S) во всех точках стрикционной линии одна и та же. Параметр распределения (S) вдоль образующей представляет среднее пропорциональное между главными радиусами кривизн в центральной точке этой образующей. Имеются опечатки. *М. А. Сабиров*

2832. Классическая поверхность четвертого порядка и некоторые вопросы с нею связанные. Д е д о (Una classica superficie del quarto ordine ed eleganti questioni ad essa collegate. D e d ò M o d e s t o), Period. mat., 1953, **31**, сер. 4, № 2, 104—128 (итал.)

Десмикой называется алгебраическая поверхность четвертого порядка, имеющая 12 двойных точек и 16 прямых, образующих классическую конфигурацию Рейе (Reye). Автор указывает, что большинство его результатов было получено ранее иными путями (Veronese, Mem. Accad. Lincei, 1881, **9**, сер. 3, 265—343; Humbert. J. Math., 1891, **7**, 353).

Исходя из уравнения десмики $(x^2, y^2, z^2, t^2)=k$ в однородных декартовых координатах, где левая часть есть ангармоническое отношение указанных аргументов, а k — параметр, автор устанавливает существование и характер расположения 16 прямых и 12 двойных точек десмики. Отметив, что коллинеации, не изменяющие десмику, и вытекающие отсюда геометрические свойства тесно связаны с теорией пар и троек так называемых десмических тетраэдров, автор изучает группу G_{96} коллинеаций, переводящих десмику общего вида (k — любое) в нее же. *С. Д. Россинский*

2833. Классическая поверхность четвертого порядка и некоторые вопросы с нею связанные. Д е д о (Una classica superficie del quarto ordine ed eleganti questioni ad essa collegate. D e d ò M.), Period. mat., 1953, **31**, сер. 4, № 3, 176—185 (итал.)

Начало см. реф. 2832. Рассматривается гармоническая десмика. Гармоническая десмика преобразуется в себя группой G_{192} из 192 коллинеаций; она допускает плоские сечения, состоящие из двух неприводимых конических сечений. Обратно, если некоторое плоское сечение десмики распределяется на два неприводимых конических сечения, то десмика гармоническая.

Эквиангармоническая десмика $(x^2, y^2, z^2, t^2)=\varepsilon$, где $\varepsilon=-e^{2\pi i/3}$ или $\varepsilon=-e^{4\pi i/3}$, преобразуется в себя группой из 288 коллинеаций.

Необходимым и достаточным условием эквиангармоничности десмики (неприводимой) является наличие на ней более чем 16 прямых.

Если на десмике общего вида лежат в точности 16 неприводимых конических сечений, а на гармонической десмике их 40, то на эквиангармонической их совсем нет. *С. Д. Россинский*

2834. Классическая поверхность четвертого порядка и некоторые вопросы с нею связанные. Д е д о (Una classica superficie del quarto ordine ed eleganti questioni ad essa collegate. D e d ò M o d e s t o), Period. mat., 1953, **31**, сер. 4, № 4, 207—228 (итал.)

Показав (реф. 2832, 2833), что 12 двойных точек десмики являются двойными коническими точками перегиба (соответствующий касательный конус неприводим и образован прямыми, имеющими с поверхностью соприкосновение третьего порядка), автор изучает поверхности четвертого порядка (без двойной линии), обладающие изолированными двойными коническими точками перегиба. Все эти поверхности образуют десять классов, среди них десмика — единственная поверхность четвертого порядка, обладающая 12 двойными коническими точками перегиба, и ни одна поверхность четвертого порядка не имеет более 12 таких точек.

В заключение даны геометрическое и аналитическое доказательства известного результата, полученного Куммером (Kummer, Abhandl. der Berlin. Akad., 1866), о том, что десмика есть поверхность, двойственная эволюте (центральной) квадрики. *С. Д. Россинский*

2835. Проективная классификация соотношений Веронезе и характеристика всех точечных моделей линейных элементов, прямых и пар точек пространства S_n. Б у р а у (Projektive Klassifikation der Veronese-Relationen und Kennzeichnung aller Punktmodelle für die Linienelemente, Geraden und Punkte-Paare des S_n. B u r a u W e r n e r), Ann. math. pura ed appl., 1953, 35, 299—326 (нем.)

Многообразие Веронезе V_n^k, как известно, является рациональным n-мерным многообразием, которое может быть получено с помощью линейной системы всех гиперповерхностей k-го порядка проективного пространства S_n; его координатам можно дать параметрическое изображение

$$x_{i_0,\,i_1,\ldots,\,i_n}=x_0^{i_0}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}(i_0+i_1+\ldots+i_n=k), \quad (1)$$

где в правые части входят все одночлены k-го измерения проективных (однородных) координат $x_0, x_1, \ldots, x_n$ пространства S_n. Многообразие Веронезе может быть также определено как полное пересечение $r(n,k)=C_{n+k}^k$ линейно независимых квадрик пространства измерения $r(n,k)-1$. Иначе говоря, если координаты точек многообразия параметрически изображаются формулами (1), то они обязательно удовлетворяют $r(n,k)$ квадратичным соотношениям (соотношениям Веронезе), и обратно. Хорошо известная поверхность Веронезе V_2^2 определяется пересечением $r(2,2)=6$ квадрик пространства S_5. (Bertini, Geometria projettiva degli spazi, Piza, 1923, гл. 12). Некоторые общие свойства V_n^k и специально V_3^2 и V_2^3 изучены автором ранее (Coll. Math. Barcelona, 1950, сер. 3, 2) В данной работе используются и приводятся некоторые простейшие свойства V_n^k, указанные автором в предыдущей статье (Burau W., Monatsh. Math., 1952, 56, 16—37).

Все ∞^{r-1} квадрик, проходящих через данное V_n^k, можно известным способом отобразить в точки линейного пространства R (пространство связей Веронезе), а многообразия V_n^k — взаимно однозначно на точки пространства X_n. Преобразования полной проективной группы G пространства S_n индуцируют

преобразования в пространстве многообразия V_n^k, с помощью которых V_n^k переходит само в себя. При этом квадрики через V_n^k переходят друг в друга так, что пучки их остаются пучками, т. е. группа G получает представление в R. Главная задача этой работы и состоит в изучении этого представления, т. е. в нахождении подпространств R, которые преобразуются сами в себя. Таковыми оказываются многообразия, точки которых соответствуют либо прямым S_n, либо его линейным элементам (т. е. элементам точка — прямая в инциденции). Автор исследует также те многообразия в R, точки которых соответствуют в S_n элементам — ориентированным парам точек. Образы указанных трех типов характеризуются «автоколлинеацией»; под этим термином автор разумеет такое преобразование образа в себя, которее включается в проективное преобразование охватывающего пространства. Приведенные геометрические соображения применяются к изучению соотношений Веронезе; автор строит некоторую фундаментальную систему конусов, которая является базисом для линейной системы всех квадрик, проходящих через заданные V_n^k ($n \geqslant 2$). *С. С. Бюшгенс*

2836. Кратные плоскости и связанные с ними топологические вопросы. Кизини (Piani multipli e questioni topologiche connesse. Chisini Oscar), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **1**, 78—87 (итал.)

Основной вопрос, разбираемый автором в докладе,— вопрос характеристики кривых разветвления n-кратной плоскости, т. е. кривых разветвления n-значной алгебраической функции двух комплексных переменных. Для исследования данного вопроса автор предлагает построение алгебраических кос, т. е. пространственных моделей, характеризующих поведение ветвей алгебраической функции одной переменной в точках ее разветвления.

В. В. Морозов

2837. Сечения алгебраического многообразия гиперплоскостями. Абелланас (Subvariedades principales de una variedad algebraica. Abellanas Pedro), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, **13**, № 5—6, 255—310 (исп., англ.)

Рассматриваются алгебраические многообразия в проективном пространстве над произвольным основным полем, содержащим бесконечное множество элементов.

Пусть V_r — r-мерное многообразие, а $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ — конечное число простых идеалов кольца многообразия V_r, размерность каждого из которых $\leqslant r-2$. Тогда в кольце многообразия V_r существует простой главный идеал, содержащийся во всех $\mathfrak{P}_i$.

Эта теорема, выражающая существование гиперповерхности, высекающей на заданном r-мерном многообразии V_r неприводимое подмногообразие размерности $r-1$, проходящее через конечное число заданных произвольно подмногообразий размерности $\leqslant r-2$, далее несколько уточняется.

Неприводимое подмногообразие размерности $s+1$ на V_r автор называет каноническим, если оно высекается на V_r системой из $r-s-1$ гиперповерхностей. Подмногообразие V_s размерности s на V_r является простым тогда и только тогда, когда на V_r существует каноническое подмногообразие V_{s+1} размерности $s+1$, содержащее V_s и такое, что V_s просто на V_{s+1}. С помощью доказанных результатов проводится новое доказательство теоремы о редукции особенностей алгебраической кривой.

А. И. Узков

2838. Некоторые теоремы об абелевых многообразиях. Мацусака (Some theorems on abelian varieties. Matsusaka Teruhisa), Natural Sci. Rept Ochan. Univ., 1953, **4**, № 1, 22—35 (англ.)

Основным результатом работы является следующая теорема:

Пусть U — многообразие (м.) с нормальным законом композиции Z, причем U и Z определены над одним и тем же полем k. Тогда, если U бирационально эквивалентно абелеву м., то оно бирационально эквивалентно над k абелеву м. в некотором проективном пространстве.

Теорема эта решает вопрос о существовании некоторых абелевых м. как м. проективного пространства, поставленный А. Вейлем, и содержит как частный случай результат Чжоу, относящийся к якобиеву м. алгебраической кривой (Amer. J. Math., 1954, **76**, №2,453—476). Как указывает автор, она объемлет также более ранний результат автора для пикаровм. неособенного проективного м.,однако референту неизвестно, вышла ли в свет цитируемая автором как появляющаяся в скором времени статья «On the algebraic construction of the Picard variety II» (Japan. J. Math.), результаты которой используются в реферируемой работе.

В качестве подготовительного материала к доказательству основной теоремы выводится ряд предложений, относящихся к свойствам алгебраических семейств положительных циклов и свойствам нормальных м.

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

2839. Циклоидная сетка. Берейс (Der Zykloidenraster. Bereis R.), Österr. Ingr-Arch., 1953, **7**, № 4, 328—331 (нем.)

Приводится простой метод приближенного построения циклоиды и псевдоциклоид (включая случаи их вырождения — логарифмическая спираль, эвольвента круга), основанный на графическом интегрировании.

С. И. Зетель

2840. О поверхности, получаемой с помощью инверсии из круго-круговой поверхности и из купола Шеффера. Кадержавек (O inversní ploše plochy kruho-kryhové a Scheffersovy báně. Kadeřávek František), Věstn. Královské české společ. nauk. Třída mat.-přírodoved., 1953, 1—6 (чеш., резюме франц.)

Рассматривается поверхность

$$z^6 + z^4(2x^2 + 2y^2 - r^2) + z^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2r^2 - 2y^2r^2) = r^2(x^2 - y^2)^2,$$

получаемая с помощью инверсии из поверхности, образованной движением окружности постоянного радиуса вдоль окружности того же радиуса, а также

поверхность, получаемая с помощью инверсии из так называемого «купола Шефферса».

Е. А. Розенфельд

2841. О конформно-дифференциальной геометрии точечных преобразований между двумя плоскостями. Мураккини (Sulla geometria differenziale conforme delle trasformazioni puntuali fra due piani. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 252—258 (итал.)

Методами конформно-дифференциальной геометрии изучается точечное преобразование T, установленное между плоскостями Евклида π и π'.

В первой части работы методом Картана проводится общее изучение преобразования T. Именно, соответствие T влечет за собой линейные соотношения между линейными дифференциальными формами ω_k^i и τ_i^k определяющими инфинитезимальные изменения локальных конформных реперов в плоскостях π и π'. За счет выбора криволинейных координат и местных конформных реперов в точках A_0 и B_0 плоскостей π и π' определяется единственный существенный коэффициент этих линейных соотношений, являющийся конформным инвариантом и названный автором коэффициентом углового расширения (coefficiente di dilatazione angolare). Из уравнений

$$| A_0,\ dA_0,\ d^2A_0,\ d^3A_0 | = 0,$$
$$| B_0,\ dB_0,\ d^2B_0,\ d^3B_0 | = 0,$$

определяющих ∞^3 окружностей плоскостей π и π', исключением третьих производных получено дифференциальное уравнение 2-го порядка, решения которого определяют в плоскостях π и π' кривые, названные автором кривыми C.

Во второй части работы доказывается основная теорема: Преобразование T между плоскостями π и π', которое преобразует ∞^2 окружностей в окружности, может быть представлено в виде произведения преобразований, устанавливающих гомографическое соответствие между сетью прямых плоскости и сетью окружностей (с точностью до конформного преобразования).

В. И. Ведерников

2842. О поверхностях, асимптотические линии обоих семейств которых принадлежат линейным комплексам. Декёйпер (Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques des deux familles appartiennent à des complexes linéaires. Decuyper Marcel), Acad. roy. Belgique. Bull. cl. sci., 1953, **39**, сер. 5, № 8—9, 688—696 (франц.)

Доказывается, что поверхности, у которых асимптотические линии каждого семейства принадлежат линейному комплексу, характеризуются тем, что диагонали четырехсторонника Демулена пересекают директрисы Вильчинского в фокусах этих директрис.

С каждой из этих поверхностей можно связать однопараметрическое семейство поверхностей такого типа, которые все имеют тот же четырехсторонник Демулена, что и первая поверхность. Это семейство входит в класс поверхностей с общим четырехсторонником Демулена, рассмотренных Годо (Godeaux L., Bull. Acad. roy. Belgique, 1953, 243—252 и 362—367).

Н. В. Лактанова

2843. Решение двух задач на построение на гиперболической плоскости. Картеси (Két szerkesztési feladat megoldása a hiperbolikus síkon. Kárteszi Ferenc), Math. lapok, 1953, 4, № 2—3, 87—91 (венг.; резюме русс., англ.)

В работе дается на основе стереометрических соображений конструкция угла параллельности, соответствующего данному расстоянию параллельности, и расстояния параллельности, соответствующего данному углу параллельности.

Резюме автора

2844. Вопросы конформной геометрии. Калапсо (Questioni di geometria conforme. Calapso Renato), Atti IV congr. Unione mat. ital, 1953, **1**, 287—318 (итал.)

Дается изложение основ конформной геометрии поверхности, заданной в параметрах линий кривизны двуметрическими квадратичными формами $ds^2 = a^2du^2 + b^2dv^2$, $\varphi_2 = dDu^2 + D''dv^2$. Три конформных инварианта

$$\omega = bD/a^2 - D''/b,\ \Omega = aD''/b^2 - D/a,$$
$$I = 2(\ln a)_{vv} - 2(\ln a)_v(\ln b)_v + (\ln a)_v^2 + (b_u/a)^2 + (D''/b)^2,$$

где индексы обозначают дифференцирование, удовлетворяют двум уравнениям в частных производных 3-го порядка, и каждое решение этой системы определяет поверхность до конформного преобразования. Изотермические поверхности определяются системой

$$I_u = -2(\Omega_{uv}/\Omega)_v - (\Omega^2)_u,$$
$$I_v = -2(\Omega_{uv}/\Omega)_u + (\Omega^2)_v.$$

При этом увеличение инварианта I на постоянное соответствует конформному изгибанию изотермических поверхностей.

Во второй половине статьи рассматривается связь между 1) конформным классом поверхностей Гишара (Guichard, C. r. Acad. sci., 1900, **130**, 155), которые соединяются в пары с общим сферическим изображением линий кривизны и главными радиусами r_i, r_i', связанными соотношением $r_1r_2' + r_2r_2' = \text{const} \neq 0$, 2) проективным классом поверхностей R, которые порождают последовательность Лапласа с соответствием асимптотических на фокальных поверхностях и связаны с поверхностями Гишара преобразованием Ли, 3) ортогональными сетями с постоянной изотропной средней кривизной в эллиптическом четырехмерном пространстве, которые связаны и с изотермическими поверхностями и с поверхностями Гишара.

С. П. Фиников

2845. Об асимптотических преобразованиях поверхности. Глаголева Н. Н., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, **7**, 151—168

Применяя метод внешних форм, автор доказывает известную теорему о характеристическом свойстве поверхностей Бианки (Фиников С. П., Теория конгруэнций, ГИТТЛ, М.-Л., 1950, 135—136) и находит следующий аналог ее в аффинной геометрии.

Если поверхности S соответствует ∞^1 поверхностей S' так, что точки M' поверхностей S', соответствующие точке M поверхности S, располагаются в касательной плоскости π поверхности S по эллипсу E с центром в M, а касательные плоскости поверх-

ностей S' в точках M' огибают конус K с вершиной в M, причем сечения конуса, параллельные плоскости π, подобны эллипсу E, то поверхность S вместе с присоединенным конусом K определяется с произволом в восемь функций одного переменного; если добавить требование соответствия асимптотических линий на поверхностях S и S', то возможны три случая: 1) конфигурация является аффинным преобразованием конфигурации Бианки и определяется с произволом в четыре функции одного аргумента, 2) оси всех конусов K параллельны, произвол — шесть функций одного аргумента, 3) оси всех конусов K проходят через одну и ту же точку, произвол — параметрический (автор, дифференцируя систему (12), не учитывает уравнения (13) и поэтому ошибочно утверждает, что в этом случае произвол — две функции одного аргумента). Если конус K вырождается в прямую l, то произвол конфигурации в общем случае — пять функций одного аргумента, при соответствии асимптотических конфигурация является аффинным преобразованием конфигурации Бианки с псевдосферическими конгруэнциями и определяется с произволом в две функции одного аргумента, если, сверх того, все прямые l проходят через одну и ту же точку, то произвол параметрический.

Отметим еще одну ошибку: линии $c(\omega^1)^2 + a(\omega^2)^2 = 0$ не являются характеристиками системы (14), так как определитель, соответствующий этой системе, не содержит такого множителя.

Р. Н. Щербаков

2846. К проективной теории комплекса прямых. Кованцов Н. И., Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 5, 917—920

Рассматривается произвольная линейчатая поверхность комплекса прямых. Существующие на каждом луче пары точек, в которых касательная плоскость к поверхности совпадает с соответствующей точке касания плоскостью комплекса, называются точками прикосновения поверхности.

Пусть точка $M = A_1 + tA_2$ луча комплекса описывает на линейчатой поверхности линию s. Тогда соответствующая в комплексе точке M плоскость огибает развертывающуюся поверхность, образующая которой пересекает луч комплекса в некоторой точке $P = A_1 + \lambda A_2$. Устанавливается, что: 1) соответствие точек M и P является инволюцией, двойными точками которой служат точки прикосновения линейчатой поверхности; 2) касательная плоскость линейчатой поверхности в точке M является плоскостью, соответствующей в комплексе точке P, и наоборот. Точки, в которых образующая развертывающейся поверхности совпадает с касательной к линии s, определяются из двух квадратных уравнений:

$$pt^2 - 2t - q = 0,$$

$$t^2(x_1q + x_2 + x_3p) - t(x_2q + x_4 + x_5p) - (x_3q + x_5p + x_6p) = 0$$

(p, q — функции координат луча, определяющие линейчатую поверхность; $x_i (i = 1 \ldots 6)$ — коэффициенты в разложении по лемме Картана квадратичного уравнения, полученного внешним дифференцированием уравнения Пфаффа, определяющего линейчатый комплекс). Требование их совместности приводит к характеристическому уравнению комплекса

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - s \\ x_2 & x_4 - 2s & x_5 \\ x_3 - s & x_5 & x_6 \end{vmatrix} = 0,$$

где s — общая величина отношения коэффициентов при неизвестном t в обоих уравнениях. Линейчатые поверхности, определяемые характеристическим уравнением, называются главными поверхностями комплекса (Klein F., Math. Ann., 1872, 5, 271).

Если характеристическое уравнение имеет три различных корня, то комплекс содержит три главные поверхности. Если имеется два равных корня, то главная поверхность неопределенна. Имеем «комплекс проективного вращения».

При трех равных корнях любая поверхность комплекса главная. Это — линейный комплекс.

Для двух главных поверхностей, соответствующих различным корням характеристического уравнения, справедливы два соотношения:

$$p_1q_2 + q_1p_2 + 2 = 0,$$

$$x_1q_1q_2 + x_4 + x_6p_1p_2 + x_2(q_1 + q_2) + x_3(p_1q_2 + q_1p_2) + x_5(p_1 + p_2) = 0$$

— условие «проективной перпендикулярности» двух линейчатых поверхностей и условие «проективной взаимной сопряженности». Отмечаются некоторые свойства проективно-перпендикулярных поверхностей и дано необходимое и достаточное условие проективной взаимной сопряженности.

Г. Г. Бикматова

2847. К проблеме расслоения пары комплексов. Фиников С. П., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 1, 125—130

Автор называет расслояемыми пару комплексов, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, если существует семейство кривых, которые в точках пересечения с произвольным лучом первого комплекса обладают соприкасающимися плоскостями, проходящими через соответствующий луч второго комплекса, и наоборот.

Этому требованию, очевидно, удовлетворяют и расслояемые пары конгруэнций (относительно асимптотических линий расслояющих поверхностей).

Доказывается, что: 1) Всякое семейство линий, расслояющее первый комплекс, расслояет и второй. 2) Если семейство линий, расслояющих комплексы, задано, то первый комплекс можно взять произвольно, а второй определяется с тремя функциями двух аргументов. 3) Пара комплексов может допускать более одного семейства расслояющих кривых. В дальнейшем рассматривается случай наибольшего произвола линий, расслояющих комплексы. Тогда первый комплекс зависит от одной функции трех аргументов, а второй определяется пятью произвольными параметрами. Два комплекса имеют общий касательный линейный комплекс. Из пучка, образованного комплексами расслояемой пары, определяется линейный комплекс $\mathfrak{A}$, который остается неподвижным при всех перемещениях внутри первого комплекса. Относительно нулевой системы комплекса $\mathfrak{A}$ полярно сопряжены соответствующие лучи расслояемых комплексов.

Если задать линейный комплекс $\mathfrak{A}$, то второй комплекс расслояемой пары определяется однозначно по первому. Эти результаты можно сопоставить с известной теоремой: конгруэнция, принадлежащая

линейному комплексу, расслояема со всякой конгруэнцией того же линейного комплекса.

Н. В. Лактанова

2848. **Пути данного профиля. Миллер** (Drumuri de profil longitudinal dat. Myller A.), Studii şi cercetări ştiinţ., 1953, 4, № 1—2, 1—17 (рум., резюме русс., франц.)

Дана плоская кривая

$$\zeta = \zeta(z) \qquad (1)$$

— индикаторная кривая данного профиля — и поверхность

$$z = z(x, y). \qquad (2)$$

Требуется определить на этой поверхности два семейства кривых Γ так, чтобы при развертывании на плоскость (ζ, z) цилиндрических поверхностей с направляющими Γ и образующими, параллельными оси z, сечения цилиндрических поверхностей плоскостью $z = 0$ совпали с осью ζ, а сами кривые Γ — с индикаторной кривой (1).

Искомые кривые Γ определяются дифференциальным уравнением

$$dx^2 + dy^2 - \zeta'^2(z)(pdx + qdy)^2 = 0,$$

из которого следует, что их проекции на плоскость $z = 0$ образуют сеть равных путей. Так называются сети, обладающие свойством, что при перемещении из произвольной точки P в точку Q вдоль линий сети алгебраическая сумма отрезков линий сети не зависит от пути.

Решается также обратная задача: по данной индикаторной кривой (1) и по данному семейству

$$f(x, y) = c$$

— одному из семейств сети равных путей — найти поверхность z. Искомая поверхность определяется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка

$$\zeta'(pf'_y - qf'_x) - \sqrt{f'^2_x + f'^2_y} = 0.$$

Я. П. Бланк

2849. **Тангенциальное истолкование евклидовой группы. Опря** (Interpretarea tangenţială a grupului euclidian. Oprea A.), Studii şi cercetări ştiinţ., 1953, 4, № 1—4, 53—67 (рум., резюме русс., франц.)

Изучаются объекты, инвариантные относительно группы преобразований

$$u'_i = a^0_i + a^j_i u_j \qquad (1)$$

с ортогональной матрицей $\| a^j_i \|$ $(i, j = 1, 2, 3)$, где u_i — коэффициенты в уравнении плоскости в E_3

$$u_1 x + u_2 y + u_3 z + 1 = 0.$$

Для развертывающихся поверхностей $u_i = u_i(\lambda)$ определяется элемент тангенциальной дуги $ds_t = \sqrt{\Sigma du_i^2}$ (Haimovici A., Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române, 1949, **A1**, № 2, 119—121).

Поверхность S задается как огибающая семейства плоскостей $u_i = u_i(\alpha, \beta)$. Ей соответствует (в инверсии относительно мнимой единичной сферы подэры поверхности S) поверхность Σ, определяемая радиусом-вектором $\mathfrak{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Тангенциальная геометрия S совпадает с точечной геометрией Σ. Тангенциальные квадратичные формы S определяются как гауссовы формы Σ; даны выражения коэффициентов этих форм (вторые формы отличаются скалярным множителем).

Асимптотические развертывающиеся поверхности S соответствуют ее точечным асимптотическим.

Тангенциальной нормалью S называется прямая пересечения касательной плоскости в точке M с плоскостью, проходящей через O перпендикулярно OM. При этом развертывающиеся поверхности кривизны совпадают с развертывающимися поверхностями конгруэнции тангенциальных нормалей.

Установлена формула $KK_t = \cos^4 \Theta_1$, где K — полная и K_t — тангенциальная кривизны S, а Θ_1 — угол между OM и нормалью к S.

Асимптотические направления Σ нормальны плоскостям, проектирующим из O асимптотические направления S, как это вытекает из формулы

$$du = \frac{hD'}{(xx_\alpha x_\beta)^2}\left\{[xx_\alpha]\,d\alpha - [xx_\beta]\,d\beta\right\} \qquad (2)$$

$(h = \sqrt{EG - F^2})$, где α, β — параметры асимптотических линий S. Следует отметить, что хотя сама по себе формула (2) верна, но автор получает ее незаконным путем, извлекая квадратный корень из квадрата вектора du^2.

Рассмотрены некоторые специальные классы поверхностей, например $H_t = 0$ (средняя тангенциальная кривизна), $KK_t = \text{const}$ и др., и даны их геометрические характеристики. *Л. Л. Вербицкий*

2850 К. **Дифференциальная геометрия** (Géométrie différentielle, Strasbourg 26 mai — 1 juin 1953. (Colloques Internationaux du Centre national de la recherche scientifique, VI + 198 pp., fig., Paris, Ed. Centre nat. rech. scient., 1953), Bibliogr. France, 1954, **143**, № 18, ч. 1, 414 (библ.)

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

2851. **Геометрия линейного уравнения второго порядка в частных производных. Ингрэм** (The geometry of the linear partial differential equation of the second order. Ingraham Richard L.), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 4, 691—698 (англ.)

Как известно (Struik D., Weiner N., J. Math. and Phys., 1927, **7**, 1—23), со всяким уравнением вида

$$g^{rs}\partial^2_{rs}\Phi + d^r\partial_r\Phi = 0; \quad r, s = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

можно сопоставить такую связность Вейля, что это уравнение примет вид:

$$\nabla_r(g^{rs}\partial_s\Phi) = 0.$$

Эта связность определяется однозначно при $n > 2$ и с точностью до преобразования $g'^{rs} = \lambda g^{rs}$; $F'_s = F_s$ при $n = 2$, если $\nabla_k g^{rs} = -F_k g^{rs}$.

Самосопряженное уравнение характеризуется тем, что соответствующая геометрия будет римановой, а если эта геометрия допускает существование поля абсолютно параллельных векторов k_i, указывается очевидное решение

$$\Phi = \int k_i du_i.$$

Отмечается, что вопрос об эквивалентности двух уравнений вида (1) равносилен при $n > 2$ вопросу эквивалентности двух связностей Вейля.

В частности, уравнение, эквивалентное уравнению Лапласа, характеризуется тем, что кривизна соответствующей связности равна нулю. *А. П. Норден*

2852. **Бесквадратурное представление изотропных кривых в сферическом пространстве трех и четырех измерений.** **Пинль** (Integrallose Darstellung isotroper Kurven im sphärischen drei- und vierdimensionalen Raum. Pinl Max), Math. Ann., 1954, **128**, № 1, 49—54 (нем.)

n-мерное сферическое пространство S_n, реализованное как гиперсфера $(n+1)$-мерного евклидова пространства R_{n+1}, с помощью стереографической проекции отображается на координатную гиперплоскость R_n. При этом, в силу конформности соответствия S_n и R_n, изотропные кривые плоского пространства R_n отображаются в изотропные же кривые сферического пространства S_n.

Отсюда получаются бесквадратурные представления изотропных кривых сферических пространств S_3 и S_4 как стереографические образы изотропных кривых евклидовых пространств R_3 и R_4. Аналогично строятся геодезические нулевые линии и изотропные торсы (развертывающие поверхности), т. е. поверхности с изотропными нормальными векторами в пространстве S_n, как стереографические образы изотропных прямых и изотропных торсов евклидова пространства R_n. *И. В. Цыганков*

2853. **Линейные комплексы плоскостей в пространстве пяти измерений.** **Бомпьяни** (Complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni. Bompiani Enrico), Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 6, 719—723 (итал.)

Линейные комплексы плоскостей в проективном пространстве S_5 изучались Сегре (Segre C., Ann. mat., 1917, **27(3)**, 75—123). Здесь дается более быстрый способ их классификации и способы эффективного построения.

Линейный комплекс плоскостей (S_2) задается уравнением $a_{ikl}p^{ikl} = 0$ $(i, k, l = 0, \ldots, 5)$, где p^{ikl} — миноры третьего порядка из проективных координат трех точек, определяющих плоскость. Если r^{ik} — плюккеровы координаты прямой, то, полагая $r_l = a_{ikl}r^{ik}$, мы можем сопоставить с ней гиперплоскость $r_l z^l = 0$ $(l = 0, \ldots, 5)$. При $r_l = 0$ имеют сингулярную прямую. Если z^l — проективные координаты некоторой точки, то, полагая $z_{ik} = a_{ikl}z^l$, получают сопоставленный с ней линейный комплекс прямых (S_1) $z_{ik}r^{ik} = 0$. Плоскость, соединяющая z с какой-нибудь прямой S_1, принадлежит (S_2), не исчерпывая, однако, всех плоскостей комплекса (S_2), проходящих через z.

1. Принимая произвольную прямую пространства S_5 за прямую O_0O_1 ($O_0(\delta_0^i)$, $O_1(\delta_1^i)$, где δ_j^i — символы Кронекера), мы найдем уравнение линейного комплекса, соответствующего любой точке ее:

$$\lambda a_{0ik}r^{ik} + \mu a_{1ik}r^{ik} = 0 \quad (i, k = 0, \ldots, 5) \qquad (1)$$

Если это уравнение зависит от λ/μ, то комплекс общий, если не зависит, то сингулярный.

2. Пусть O_0O_1 — сингулярная прямая. Если линейная конгруэнция, принадлежащая пучку (1), имеет различные директрисы d_0 и d_1, то комплекс общий. Все сингулярные прямые такого комплекса пересекаются с двумя опорным плоскостями τ_1, τ_2 без общих точек (fra loro sghembi). Всякий общий комплекс принадлежит пучку комплексов, образованных двумя стержневыми (все плоскости совпадают друг с другом) комплексами, каждый из которых вырождается в соответствующую опорную плоскость.

3. Если директрисы d_0 и d_1 совпадают, то комплекс специальный несингулярный. Опорные плоскости сливаются в одну плоскость τ, а все сингулярные прямые комплекса (S_2) лежат в τ.

4. В заключение рассматривается комплекс, имеющий по крайней мере один центр (любая плоскость, проходящая через центр, принадлежит комплексу). Во всех случаях находятся канонические уравнения и указывается способ построения комплекса. *Н. И. Кованцов*

2854. **Об аналитических многолинейчатых многообразиях V_3.** **Мураккини** (Sulle varietá V_3 analitiche pluririgate. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 2, 138—144 (итал.)

Многообразие V_3, погруженное в проективное пространство, называется μ-линейчатым, если оно содержит ∞^2 прямых так, что через каждую точку многообразия проходит μ прямых системы, никакие три из которых не компланарны.

Исследуя асимптотические формы различных порядков μ-линейчатого многообразия V_3 и пользуясь методом внешних форм, автор, кроме известных случаев, получает и новые. Доказана теорема:

Если V_3 — аналитическое μ-линейчатое многообразие в пространстве максимальной допустимой размерности, то оно представляет собой:

а) для $\mu = \infty$ — V_3^2 (квадрика) в S_4 (случай Севери);

б) для $\mu = 6$ — общее многообразие V_3^3 третьего порядка в S_4 (случай Сайсема);

в) для $\mu = 4$ — многообразие V_3^4 в проективном пространстве S_5, являющееся базисом пучка квадрик V_4;

г) для $\mu = 3$ — многообразие Сегре V_3^6 в S_7 (случай Бляшке — Боля).

Если $\mu = 2$, то нет ограничения для размерности окружающего пространства. Доказано, что аналитическое двухлинейчатое многообразие V_3 пространства S_n, $n > 10$, расслаивается на ∞^1 квадрик пространства S_3. Этот результат является частным случаем следующей теоремы автора:

Если многообразие V_3 в пространстве S_n, $n > 10$,

содержит два семейства ∞^2 асимптотических кривых, то оно расслаивается на ∞^1 поверхностей, которым принадлежат кривые обеих систем. Автор замечает (без доказательства), что аналогичный результат легко получить и для V_3 в S_7, а именно: если V_3 в S_7 имеет три системы ∞^2 асимптотических кривых (с некомпланарными касательными), то оно расслаивается на три системы ∞^1 поверхностей, которым принадлежат попарно линии этих систем.

В. Т. Базылев

2855. **Вариация конгруэнций кривых ортогонального репера в римановом пространстве.** Б а н ь (Variation of congruences of curves of an orthogonal ennuple in a Riemannian space. P a n T. K.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 4, 519—523 (англ.)

Автор вводит величины, аналогичные коэффициентам вращения Риччи, и с их помощью характеризует геодезические, параллельные и эквидистантные конгруэнции (Peters R. M., Amer J. Math., 1935, **47**, 103—111; 1937, 59, 564—574),

Пусть $\lambda_h|$ — единичные касательные, которые определяют ортогональный репер в римановом пространстве V_n, и γ_{hkm} — коэффициенты вращения этого репера (Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, М., 1948, гл. III). Тогда величины

$$\gamma_{hk} = \left(\sum_{m=1}^{n} \gamma_{hkm}^2 \right)^{1/2}$$

автор называет вариацией (variation) конгруэнции $\lambda_h|$ по отношению к $\lambda_k|$. Если здесь m не принимает значения k, то $\gamma_{hk}|$ называется подвариацией (subvariation) $\lambda_h|$ по отношению к $\lambda_k|$. Геометрический смысл вариаций заключается в следующем: если $\lambda_h|$ перемещается локально, а $\lambda_k|$ — параллельно вдоль фиксированной конгруэнции C, то γ_{hk} является экстремумом скорости изменения косинуса угла между $\lambda_h|$ и $\lambda_k|$ при изменении C. В ортогональном репере нормальная конгруэнция имеет нулевую вариацию по отношению к другой тогда и только тогда, когда каждая конгруэнция является эквидистантной по отношению к другой или каждая конгруэнция является параллельной по отношению к другой.

Кривые некоторой конгруэнции ортогонального репера параллельны вдоль кривых всех конгруэнций репера тогда и только тогда, когда вариация рассматриваемой конгруэнции по отношению к каждой конгруэнции равна нулю. В частности, кривые конгруэнции ортогонального репера являются геодезическими, если вариация конгруэнции по отношению к любой конгруэнции репера равна нулю.

В заключение показано, что вариация каждой конгруэнции ортогонального репера по отношению к любой другой конгруэнции репера равна нулю в том и только в том случае, когда репер состоит из конгруэнций геодезических линий и каждая конгруэнция репера параллельна вдоль любой конгруэнции пространства V_n.

Кроме этого, в работе введены величины $\gamma_{nnn} = \lambda_h|_{i,j}\lambda_n^i\lambda_n^j$, называемые тенденцией (tendency) $\lambda_h|$ по направлению к $\lambda_n|$. Устанавливается связь между тенденцией, вариацией и подвариацией.

Л. С. Атанасян

2856. **Исчисление интегральной аффинной связности, присоединенной к точке многообразия аффинной связности.** К а с т о л ь д и (Calcolo della connessione affine integrale associata ad un punto di una varietà a connessione affine. C a s t o l d i L u i g i), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 6, 760—765 (итал.)

Понятие интегральной аффинной связности $\overset{P}{(E)}$, присоединенной к точке P пространства с аффинной связностью (L), ввел Бомпиани (Bompiani E., Ann. mat. pura ed appl., 1945, **24**, сер. 4, 257—282). Этому понятию можно дать два следующих определения:

1. Обе связности $\overset{P}{(E)}$ и (L) имеют в точке P общую систему путей, на которых ими выделяются одни и те же аффинные параметры; при этом $\overset{P}{(E)}$ симметрична и имеет нулевую кривизну.

2. Связность $\overset{P}{(E)}$ такова, что во всякой нормальной системе координат, определяемой связностью (L) в точке P, все ее коэффициенты равны нулю.

В реферируемой работе доказана эквивалентность этих определений; показано, что определение $\overset{P}{(E)}$ не зависит от кручения (L); получены формулы, которые дают возможность вычислять коэффициенты $\overset{P}{(E)}$ и все их последующие производные по заданной связности (L).

П. И. Швейкин

2857. **О нормальной проективной связности, присоединенной к расслоенному многообразию второго порядка.** Я н ь Ч ж и-д а (Sur la connexion projective normale associée à un feuilletage du deuxième ordre. Y e n C h i h-T a), Ann. mat. pura ed appl., 1953, **34**, сер. 4, 55—94 (франц.)

Рассматривается в арифметическом n-мерном пространстве R^n система k-мерных подмногообразий V_k. Такая система называется расслоенным многообразием 2-го порядка, если через каждую точку $P(x^1, \ldots, x^n) \subset R^n$ проходит единственное подмногообразие V_k, касающееся в P произвольно заданного плоского k-мерного элемента $(v^1, \ldots, v^l)$.

Множеству $R^{n,k}$ k-мерных плоских элементов, присоединенных к точкам R^n, приводится во взаимно однозначное соответствие множество центропроективных n-мерных пространств, отнесенных к точечным реперам $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Устанавливается проективная связность при помощи уравнений инфинитезимального перемещения репера:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad \omega_0^0 = 0, \quad \omega^k = dx^k,$$

$$\omega_k^\alpha = \Pi_{ki}^\alpha dx^i + \Pi_{k\xi}^\alpha dv^\xi, \quad \omega_i^i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, dv^1, \ldots, dv^l),$$

$$(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n,\ i, k = 1, \ldots, n;\ \xi, \eta = 1, \ldots, l).$$

Дополнительно предполагается, что

$$\Omega^k = d\omega_0^k - [\omega_0^i \omega_i^k] = 0,$$

$$\Omega_i^i = d\omega_i^i - (n+1)[\omega_i^0 \omega_0^i] = 0.$$

Тогда оказывается, что $\Pi_{k\xi}^\alpha = 0$; $\Pi_{ki}^\alpha = \Pi_{ik}^\alpha$. Верно и обратное.

Если, кроме того, форма

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - [\omega_i^s \omega_s^j] - [\omega_i^0 \omega_0^j] - \delta_i^j [\omega_k^0 \omega_0^k]$$

имеет вид

$$\Omega_i^j = \Pi_{ims}^j [dp_\rho^s + p_\rho^k \omega_k^s, dx^m],$$

где Π_{ims}^j — функции k-элемента, то проективная связность называется полунормальной. Такая связность однозначно определяется величинами $\Pi_{jm}^i (k, i, j, m, s = 1, \ldots, n)$.

Расслоенное многообразие второго порядка

$$x^i = f^i (c_\lambda' v^\lambda + c', \ldots, c_\lambda^k v^\lambda + c^k; a^1, \ldots, a^t),$$
$$t = (n - k)(k + 1)$$

определяется системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x^i}{\partial v^\rho} = p_\rho^i, \quad \frac{\partial p_s^i}{\partial v^\sigma} = H_{\rho\sigma}^i (x, p)$$

тогда и только тогда, когда эта система вполне интегрируема и

$$c_\alpha^\rho c_\beta^\sigma H_{\rho\sigma}^i (x, q_\gamma^m) = H_{\alpha\beta}^i (x, p_\gamma^m),$$

где $q_\gamma^m c_\alpha^\gamma = p_\alpha^m$.

С каждым расслоенным многообразием можно связать единственную полунормальную проективную связность, для которой подмногообразия V_k являются k-геодезическими. Эта связность характеризуется дополнительными условиями:

$$p_\rho^j \Pi_{jmh}^i = 0, \; p_\lambda^m p_\alpha^j \Pi_{jm\alpha}^\rho = 0$$

и называется нормальной.

Нормальная проективная связность, определенная величинами Π_{jm}^i, может быть присоединена к расслоенному многообразию второго порядка тогда и только тогда, когда существует система функций $\gamma_{\alpha\beta}^\nu$ такая, что система уравнений

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = p_\alpha^i; \quad \frac{\partial p_i^z}{\partial u^\beta} + \Pi_{jm}^i p_\alpha^j p_\beta^k = \gamma_{\alpha\beta}^\nu p_\nu^i$$

вполне интегрируема.

В последней главе рассматривается вопрос о присоединении к расслоенному пространству нормального пространства аффинной связности.

Г. Ф. Лаптев

2858. О дивергенции нормального гравиметрического поля. Марусси (Sulla divergenza del campo gravimetrico normale. Marussi Antonio), Geofis. pura e appl., 1953, 25, 1—5 (итал.)

В современных исследованиях гравитационной аномалии имеет существенное значение вычисление дивергенции поверхностного градиента скалярного поля гравитации g, т. е. второго дифференциального параметра $\Delta_2 g$ этого поля, вычисленного на поверхности уровня Σ; оно может быть практически осуществлено с помощью формул Пицетти (Pizzetti P., Rend. R. Accad. Lincei, 1909, 18, 1° sem., 309), если на поверхности Σ определены значения g, найденные, например, в результате гравиметрических измерений. Используя свои результаты, опубликованные в 1950 г., касающиеся гравитационных полей Сомилиана (Somigliana), автор применяет к этим полям общие формулы, выражающие $\Delta_2 g$ через геометрические и динамические элементы поля, в частности, через вторую производную модуля g вдоль силовых линий.

А. М. Лопшиц

2859. О локальном значении теории логарифмического потенциала в дифференциальной геометрии. Винтнер (On the local rôle of the theory of the logarithmic potential in differential geometry. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, 75, № 4, 679—690 (англ.)

Определенная положительная дифференциальная квадратичная форма

$$g_{\alpha\beta} (u^1, u^2)\, du^\alpha du^\beta, \qquad (1)$$

коэффициенты которой определены в открытой области D и являются функциями класса C^n, называется C^n-метрикой в D. C^n-метрика (1) называется изометричной C^m-метрике в D'

$$g'_{\alpha\beta} (u'^1, u'^2)\, du'^\alpha du'^\beta, \qquad (2)$$

если для любой точки $(u_0, v_0) \in D$ существует круг D_0: $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 < \varepsilon^2$ и C^1-отображение

$$u = u(u', v'), \; v = v(u', v') \; (u = u^1, v = u^2), \qquad (3)$$

отображающее D_0 на $D_0' \subset D$ такое, что (1) и (2) становятся тождественными в D_0 в силу (3). Кривизной C^n-метрики $(n \geqslant 2)$ называется кривизна $K(u^1, u^2)$ формы (1). K будет функцией класса C^{n-2}, а может быть и выше. С точки зрения автора, особый интерес имеют C^2-метрики, кривизна которых является функцией класса C^1 (или, вообще, C^n-метрики, кривизна которых является функцией класса C^{n-1+m}, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 0$), — метрики промежуточные между C^2- и C^3-метриками.

Метрика (1) называется конформной (изотермической), если она имеет вид:

$$g'(u', v')(du'^2 + dv'^2), \qquad (4)$$

Известно, что каждая C^{n+1}-метрика изометрична конформной C^n-метрике, но не каждая C^n-метрика изометрична конформной C^n-метрике (Hartman P., Wintner A., Amer. J. Math., 1953, 75, 260—276). Автором доказываются теоремы:

Теорема (*). Если C^n-метрика (1) $(n \geqslant 2)$ имеет кривизну K класса C^{n-1+m} $(0 \leqslant m \leqslant 2)$, то (1) изометрична конформной C^{n+m}-метрике (4) (и K как функция параметров u', v' является функцией класса C^{n-1+m}).

Как замечает автор, необходимость указанных ограничений для m, а также случай $n = 1$ остаются неясными.

Теорема 3. Для того чтобы C^2-метрика (1) могла быть реализована как метрика некоторой поверхности класса C^3, необходимо чтобы (1) имела кривизну класса C^1.

Теорема 4. На каждой поверхности класса C^3 существует изотермическая C^3-параметризация.

Рассматриваются также случаи HC^n-метрики (т. е. C^n-метрики все частные производные порядка

$\leqslant n$ коэффициентов которой удовлетворяют условию Гёльдера) и метрики, которая определяется второй квадратичной формой поверхности. *Ю. Е. Пензов*

2860. **Вопросы действительности гармонической формы и ее гессиана. I. Сегре** (Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. I. Segre, Beniamino), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 15, № 5, 237—242 (итал.)

Содержание данной заметки I и последующей II было автором доложено на сентябрьском Международном съезде по дифференциальной геометрии в Венеции.

Автор рассматривает гармоническую форму $f = f(x, y, z)$ от трех переменных с действительными коэффициентами, т. е. форму, удовлетворяющую условию:

$$f_{11} + f_{22} + f_{33} = 0, \tag{1}$$

и ее гессиан

$$h = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Леви (Lewy H., Amer. J. Math., 1938, **60**, 555—560) доказал, что всегда существуют действительные значения x, y, z, не равные нулю одновременно, для которых $h(x, y, z)$ обращается в нуль. Доказательство Леви опирается на метрико-топологическую лемму Робинсона и на некоторые свойства нулей полиномов Лежандра. В своих заметках автор доказывает это предложение чисто алгебраическим путем, который дает и дальнейшие свойства троичной гармонической формы и ее гессиана.

Чтобы бинарная форма φ степени n была гармонической, ее $n+1$ коэффициентов должны удовлетворять $n-1$ линейным однородным уравнениям и все они определяются, например, через два первых. Поэтому каждая бинарная гармоническая форма с действительными коэффициентами может быть представлена в виде

$$\varphi(x, y) = R\{(a - ib)(x + iy)^n\}, \tag{3}$$

где R обозначает действительную часть выражения, стоящего в фигурных скобках. Переходя к тригонометрическим формам комплексов $a + ib = \rho_0 e^{i\theta_0}$, $x + iy = \rho e^{i\theta}$, нетрудно видеть, что форма φ обращается в нуль в случаях

$$y = x \operatorname{tg} \frac{2\theta_0 + (2k+1)\pi}{2n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

т. е. она имеет n действительных и различных корней. Ее гессиан будет $h = -n^2(n-1)^2(a^2+b^2)(x^2+y^2)^{n-2}$ и он всегда отрицательный ($n \geqslant 2$).

Если троичная форма $f(x, y, z)$ с действительными коэффициентами будет гармонической, то она останется гармонической при умножении ее на некоторый постоянный, отличный от нуля, множитель либо при ортогональной замене переменных x, y, z; в том и другом случае ее гессиан умножается на постоянный множитель. Считая x, y, z за проективные координаты точки в действительной эллиптической плоскости с абсолютом

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{4}$$

можно гармоничность формы f толковать как некоторое проективное соотношение абсолюта (4) с кривой, изображаемой уравнением $f = 0$; именно соотношение (1) выражает аполярность относительно (4) $(n-2)$-й поляры f.

Для тождественного обращения в нуль гессиана необходимо и достаточно, чтобы кривая f имела n-кратную точку, действительную, если f действительно, и тогда подходящим преобразованием координат в эллиптической плоскости f приводится к виду (3).

Обозначим через δ линейный дифференциальный оператор порядка $k < n$ с постоянными коэффициентами вида

$$\delta = \sum_{i,j,l} C_{i,j,l} \frac{\delta^k}{\delta_x^i \delta_y^j \delta_z^l}, \qquad i + j + l = k,$$

тогда из (1) следует

$$(\delta f)_{11} + (\delta f)_{22} + (\delta f)_{33} = 0,$$

т. е. если f — гармоническая форма, то δf — тоже гармоническая. Отсюда: гармоническая кривая с точкой O кратности $r \geqslant 1$ имеет r действительных ветвей, проходящих через эту точку, с различными касательными, делящими полный угол с вершиной O на $2r$ равных частей.

Пусть f будет гармонической формой порядка n с отличным от нуля дискриминантом, не удовлетворяющая никакому другому уравнению с частными производными 2-го порядка, отличному от (1). Тогда уравнение

$$\lambda_1 f_{12} + \lambda_2 f_{22} + \lambda_3 f_{33} + \lambda_4 f_{23} + \lambda_5 f_{31} + \lambda_6 f_{12} = 0 \tag{5}$$

при любых параметрах λ изображает линейную систему четвертой ступени гармонических кривых, не сводящихся к пучку. Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_6)$ будут однородными проективными координатами точки пространства S_5, уравнения

$$X_1 = f_{11},\ X_2 = f_{22},\ X_3 = f_{33},\ X_4 = f_{23},\ X_5 = f_{31},\ X_6 = f_{12} \tag{6}$$

будут параметрическими уравнениями бирациональной поверхности F порядка $(n-2)^2$, принадлежащей S_4.

Текущие координаты точек поверхности F удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{d^2X}{dy^2} + \frac{d^2X}{dz^2} = 0, \tag{7}$$

Характеристики уравнения (7) образуют на F сопряженную систему; ее линии — алгебраические (бирациональные) порядка $n-2$. В связи с результатом, указанным выше, отсюда следует, что всякая действительная касательная гиперплоскость F пересекает поверхность по кривой (кратно), проходящей через точки касания и имеющей все действительные ветви с различными к ним касательными. *С. С. Бюшгенс*

2861. **Вопросы действительности гармонической формы и ее гессиана. II. Сегре** (Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. II. Segre B.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **15**, № 6, 339—344 (итал.)

(Часть I см. реф. 2860).

Если действительная гармоническая кривая f порядка n имеет действительную r-кратную точку O $(2 \leqslant r < n)$, то ее гессиан h в точке O имеет кратность $3r-4$, причем h имеет r действительных

ветвей через O с различными касательными; если $r > 2$, то остальные ветви мнимые и имеют касательными две касательные из точки O к абсолюту, каждая считаемая по $r-2$ раза. В указанных условиях r касательных к f в точке O делят область этой точки на $2r$ частей, в которых знаки гессиана h чередуются.

Вблизи произвольной действительной точки O' гессиана любой действительной гармоничной кривой порядка $n > 2$ гессиан принимает как положительные, так и отрицательные значения. Для доказательства этих предложений автор для точки O принимает в эллиптической плоскости координаты (0; 0,1) и, выделив из f члены младшей степени (r) относительно x, y, т. е. полагая $f_x = \varphi(x, y) z^{n-r} + \cdots$, подсчитывает для гессиана группу членов, содержащих опять x, y в наименьшей степени. Далее автор показывает: если r — кратность точки O' гессиана и эта точка не кратная для f, то кривая h проходит через O', имея r действительных ветвей с различными касательными.

Автор отмечает, что принадлежность точки O' гессиану можно истолковать как распадение конической поляры точки O' относительно f; исследуя подробно, когда это происходит, он получает доказательство указанного предложения. Отсюда гессиан какой-либо троичной гармонической формы с действительными коэффициентами, если не обращается в нуль тождественно, принимает как положительные, так и отрицательные значения, когда переменные пробегают действительные значения, причем уравнение $h = 0$ имеет бесчисленное множество решений в действительной области. *С. С. Бюшгенс*

2862. Смысл нового поля Эйнштейна. Таррат с-Видаль (Significado del nuevo campo de Einstein. Tharrats Vidal Jesús M.), An. Real soc. española fís. y quím., 1953, **A49**, № 11—12, 303—310 (исп.; резюме англ.)

Проективитет на прямой можно рассматривать как такое соответствие точек A и A', при котором ангармоническое отношение этих точек и двойных точек M и N этого проективитета имеет фиксированное значение

$$(MNAA') = k.$$

При $k = -1$ проективитет становится инволюционным.

Автор предлагает ввести понятие проективной метрики относительно заданного проективитета, определив расстояние между двумя любыми точками A и B прямой формулой

$$d_{AB} = \frac{1}{c} \log \left[\frac{(MNAB)}{-k} \right],$$

которая обращается в обычную формулу Кэли, если проективитет инволюционный.

В общем случае имеют место соотношения

$$d_{AA} = \gamma; \; d_{AB} + d_{BA} = 2\gamma,$$

где

$$\gamma = -\frac{1}{c} \log(-k)$$

(в работе несколько раз приводится неверная формула $d_{AB} + d_{BA} = -\gamma$).

Введенную им метрику автор называет несимметричной, отмечая, что несимметричный тензор g_{ij} определяет такую метрику на несобственных прямых пространства, которую можно также рассматривать как несимметричную угловую метрику этого пространства.

Автор считает, что понятие несимметричной метрики может быть полезно в новой единой теории поля Эйнштейна (The Meaning of relativity, Third ed., 1950), в основу которой положено рассмотрение поля несимметричного тензора g_{ij}, заданного в пространственно-временном континууме. При этом тензор

$$\underset{\sim}{g}_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})$$

характеризует поле тяготения, а угол между двумя совпавшими направлениями $\theta_{AA} = \gamma$ — эффект электромагнитного поля. *А. П. Норден*

2863. Связности, определенные на почти эрмитовом многообразии. Легран (Connexions définies sur une variété presque hermitique. Legrand Gilles), C. r. Acad. Sci., 1953, 237, № 25, 1626—1627 (франц.)

Пусть V_{2n} — риманово многообразие класса C^2, F — внешняя форма ранга $2n$ такая, что можно указать формы θ^α с комплексными коэффициентами, линейные относительно вещественных дифференциалов, через которые метрическая форма и форма F выражаются с помощью равенств $ds^2 = 2\Sigma_\alpha \theta^\alpha \theta^{\alpha *}$, $F = i\Sigma_\alpha [\theta^\alpha, \theta^{\alpha^*}]$, где $\alpha = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha^* = \alpha + n$, $\theta^{\alpha^*} = \bar{\theta}^\alpha$; такие многообразия называются почти эрмитовыми, а соответствующие реперы — присвоенными почти эрмитовой структуре (adaptés). Допустимыми называются реперы, по отношению к которым одновременно имеют место равенства $ds^2 = 2g_{\alpha\beta^*}\psi^\alpha \psi^{\beta^*}$, $F = ig_{\alpha\beta^*}[\psi^\alpha, \psi^{\beta^*}]$.

Пусть γ^i_{jk} — коэффициенты связности, определяемой формой ds^2. Автор рассматривает связности l и c, определяемые коэффициентами $l^i_{jk} = \gamma^i_{jk} + \frac{1}{2} F^{il} \nabla_k F_{jl}$ (связность Лихнеровича), $c^i_{jk} = \gamma^i_{jk} + \frac{1}{2} F^{il}(\nabla_k F_{jl} + \nabla_j F_{kl} - \nabla_l F_{jk})$ (связность Черна — Либермана).

Далее рассматриваются свойства ковариантного дифференцирования в связностях l и c и выражения коэффициентов этих связностей по отношению к допустимым реперам.

Если формы ψ^α, определяющие ds^2, образуют вполне интегрируемую систему, то многообразие называется псевдоэрмитовым и ковариантные производные метрического тензора по отношению к связностям c и l обращаются в нуль.

В конце рассматривается случай эрмитова многообразия, когда естественный репер, связанный с комплексными координатами z^i, допустим *В. В. Рыжков*

2864. Конформная геометрия и элементарные частицы. Ингрэм (Conformal geometry and elementary particles. Ingraham R.), Proc. Nat.

Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 4, 237—240 (англ.)

Выдвигается гипотеза, что в физике следует заменить преобразования Лоренца конформными преобразованиями в пространстве — времени. Каждой элементарной частице с радиусом-вектором r, временной координатой t и частотой ω ставится в соответствие сфера с центром в точке (r, t) пространства — времени и с радиусом $\hbar\omega/c$; каждой элементарной частице с импульсом p, энергией E и массой покоя m ставится в соответствие сфера с центром в точке (p, E) пространства импульсов — энергии и с радиусом mc. Гипотеза состоит в том, что равноправными системами отсчета следует считать не системы, переводимые друг в друга преобразованиями Лоренца, а системы, переводимые друг в друга конформными преобразованиями (т. е. лоренцевыми преобразованиями + переносы + гомотетии + инверсии относительно сфер), и что движение частиц описывается геодезическими линиями в пространстве сфер, в котором за расстояние между сферами принимается их угол (это пространство является 5-мерным римановым пространством кривизны + 1). Гипотеза подлежит экспериментальной проверке.

Б. А. Розенфельд

2865. **Алгебраические свойства поля в релятивистской теории несимметричного поля. Эйнштейн, Кауфман** (Algebraic properties of the field in the relativistic theory of the asymmetric field. Einstein A., Kaufman B.), Ann. Math., 1954, **59**, № 2, 230—244 (англ.)

Рассматривается гравитационное поле, задающееся не симметричным тензором g_{ik}, как обычно, а несимметричным тензором, симметричная часть которого является основным тензором римановой метрики с сигнатурой $+++-$. Показывается, что для того чтобы тензор g_{ik} обладал этими свойствами, достаточно, чтобы определитель этого тензора был бы отличен от нуля и чтобы величины Γ^l_{ik}, определяющиеся из соотношения $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = g_{is}\Gamma^s_{lk} + g_{sk}\Gamma^s_{il}$, удовлетворяли бы определенным условиям «регулярности».

Б. А. Розенфельд

2866. **Необходимая единая теория поля как неголономная параболическая геометрия Ли, реализуемая в трехмерном пространстве Декарта. Такасу** (A necessary unitary field theory as a non-holonomic parabolic Lie geometry realized in the three-dimensional Cartesian space. Takasu Tsurusaburo), Proc. Japan. Acad., 1953, **29**, № 10, 533—536 (англ.)

Статья является продолжением работ автора по приложению неголономных геометрий Ли и Лагерра в трехмерном пространстве к общей теории относительности и квантовой механике (Yokohama Math J., 1953, **1**, 89 — 104, 105 — 116).

Используя формулы неголономной параболической геометрии Ли, автор дает закон движения двух частиц, обладающих данными «покоящимися» массами и данными электрическими зарядами, выводит обобщенные уравнения Максвелла в общей теории относительности. Введением вспомогательной функции $\psi = 2\gamma_5 \dfrac{\partial}{\omega^5}(EP + e\Psi + \bar{E}\bar{P} + \bar{e}\bar{\Psi})$, где γ_1, γ_2, γ_3, γ_5 образуют 4-4-матрицу (Паули); ω^5 — линейная векторная форма $\gamma_5\omega^5 = \gamma_l d\xi^l$, E, $\bar{E}$ — радиальная энергия, испускаемая частицей $P(\xi)$ (или $\bar{P}$); e, $\bar{e}$ — электрические заряды, Φ^i $(i = 1, 2, 3)$ — электромагнитный потенциальный вектор, Φ^4 — электростатический потенциал, $e\Phi^5$ — гравитационный потенциал и $\Psi = \gamma_e\Phi^e - \gamma_5\Phi^5$, автор сводит обобщенное уравнение Дирака к обобщенному уравнению Шредингера.

Р. М. Гейдельман

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

2867. **Точечные преобразования и их характеристические кривые. Мураккини** (Trasformazioni puntuali e loro curve caratteristiche. Muracchini Luigi), Atti IV congr. Unione mat ital., 1953, **2**, 417—424 (итал.)

Если аналитические функции $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$ определяют преобразование T плоскости $\pi_2(u, v)$ в плоскость $\pi_1(x, y)$, где x, y и u, v — неоднородные проективные координаты точек, то прямым плоскости π_1 будут соответствовать линии

$$d^2v/du^2 = av'^3 + bv'^2 + cv' + d,$$

где $v' = dv/du$ и коэффициенты a, b, c, d зависят от частных производных 2-го порядка функций f и φ. Характеристические линии преобразования T определяются уравнением

$$av'^3 + bv'^2 + cv' + d = 0. \qquad (1)$$

Наоборот, уравнение вида (1) определяет характеристические кривые некоторого преобразования, если совместны два уравнения в частных производных 2-го порядка на нормирующий множитель ρ уравнения (1). Присоединенное преобразование T для каждого решения ρ определяется однозначно. При продолжении этой системы уравнений получается 4 уравнения на третьи производные неизвестной функции ρ с определителем из коэффициентов при старших производных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3a - 2b & c & 0 \\ 0 & 3a - 2b & c \\ 0 & b - 2c & 3d \end{vmatrix}$$

Если ранг $\Delta = m$, то из произвольной точки исходит $m - 1$ характеристических направлений и род преобразований T (Boruwka, Publ. Univ. Masaryk Brno, 1926—1927, № 72, 85) $\alpha = 5 - m$. При $m = 4$ тройная сеть кривых (1) допускает не более ∞^4 присоединенных преобразований T. При $m = 3$ многообразие присоединенных преобразований может зависеть от одной произвольной функции одного аргумента. Это действительно имеет место, когда система (1) состоит из двух пучков прямых, из которых один сдвоенный. При $m = 2$ уравнение (1) принимает вид $[v' + \alpha(u, v)]^3 = 0$; если при этом $\alpha\partial\alpha/\partial v - \partial\alpha/\partial u = 0$, то сеть образована прямыми, а присоединенное преобразование T зависит от двух функций одного аргумента.

М. И. Кованцов

2868. **Замечание о кривых порядка n в n-мерном пространстве. Шерк** (A remark on curves of order n in n-space. Scherk P.), Trans. Roy. Soc. Canada, Sec. 3, 1953, **47**, June, 35—36 (англ.)

Порядком замкнутой кривой или дуги A в n-мерном проективном пространстве называется верхний предел числа точек A, которые лежат в одной $(n-1)$-мерной плоскости. В заметке геометрическими рассуждениями доказывается следующая теорема: Каждая кривая порядка n в n-мерном проективном пространстве может быть равномерно аппроксимирована дифференцируемыми кривыми порядка n. (Автор называет кривую дифференцируемой, если в каждой точке ее существуют соприкасающиеся плоскости всех размерностей.) Автор отмечает, что эта теорема следует из более сильных результатов Шёнберга (РЖМат., 1954, 1614) о приближении кривых порядка n аналитическими кривыми порядка n. *В. А. Ефремович, А. С. Шварц*

2869. О поверхностях, дифференцируемых по отношению к некоторому закону гиперкомплексного умножения. Фреше (Sur les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication hypercomplexe. Fréchet Maurice), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 6, 633—636 (франц.)

Сообщение тесно связано с предыдущей заметкой того же автора (РЖМат, 1954, 3308); рассматривается поверхность S, допускающая параметризацию, при которой гиперкомплексная функция $\Phi(w) = x(u, v) f_1 + y(u, v) f_2 + z(u, v) f_3$, образованная с помощью уравнений поверхности $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ гиперкомплексного аргумента $w = ue_1 + ve_2$, дифференцируема относительно закона (R) умножения: $f_k e_k = \sum_{h=1}^{3} a_{krh} f_h$ (в статье (R) приведено с опечаткой — индекс суммирования внизу указан «k»). Функция $\Phi'(w)$, производная от $\Phi(w)$ относительно (R), определяет поверхность S': $x = L(u, v)$, $y = M(u, v)$, $z = N(u, v)$, производную от поверхности S. Автор приводит классификацию рассматриваемых им поверхностей, выделяет и перечисляет некоторые специальные их типы, в том числе поверхности, эксценциальные относительно (R), для которых $S \equiv S'$. *В. В. Рыжков*

2870. О преобразованиях главной группы в неевклидовой геометрии и о комплексной тригонометрии. Фладт (Über die Transformationen der Hauptgruppe in der nichteuklidischen Geometrie und die komplexe Trigonometrie. Fladt Kuno), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 3/4, 129—154 (нем.)

Рассматривается группа всех изометрических преобразований неевклидовых плоскостей и трехмерных пространств Римана и Лобачевского, приводится известное представление этих групп кватернионами и бикватернионами различных видов (Котельников А., Теория векторов и комплексные числа — в книге Котельников А., Фок В., Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике, М.—Л., 1950, 4—47). Рассмотрение трехмерных пространств связывается с известной интерпретацией многообразий прямых трехмерных неевклидовых пространств в виде комплексных сфер (Котельников А., цитированное сочинение) и тригонометрические соотношения на этих сферах истолковываются в неевклидовых пространствах. Устанавливаются также частные виды кватернионов и бикватернионов, соответствующих различным видам изометрических преобразований. Автор отправляется от исследований Фр. Шиллинга (памяти которого посвящена работа) и Э. Штуди и с работами А. Котельникова, повидимому, не знаком. *М. А. Джавадов*

2871. О кинематическом отображении в евклидовом пространстве. Мюллер (Sulla proiezione cinematica nello spazio Euclideo. Müller Hans Robert), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 407—411 (итал.)

Движения трехмерного евклидова пространства представляются дуальными кватернионами единичного модуля и вращениями сферы в трехмерном дуальном евклидовом пространстве, пары диаметрально противоположных точек которой изображают прямые евклидова пространства, и находятся образы различных семейств прямых на этой сфере. В основном содержание статьи является изложением известных результатов, полученных А. П. Котельниковым (Винтовое счисление, Казань, 1895) и Э. Штуди (Study E., Geometrie der Dynamen, Leipzig, 1901), из которых автор упоминает только второго. *Б. А. Розенфельд*

2872. Булева геометрия, I. Блюменталь (Boolean geometry. I. Blumenthal Leonard M.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, **1**, сер. 2, 343—360 (англ.)

В булевой алгебре, операции сложения и умножения которой обозначаются как в обычной арифметике, а дополнение элемента a обозначается a' ($a + a' = 1$, $aa' = 0$), рассматривается операция $d(a, b) = ab' + a'b$. Эта операция обладает свойствами обычного расстояния: $d(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$, $d(a, b) = d(b, a)$ и $d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c)$. Поэтому элемент $d(a, b)$ называется расстоянием между элементами a, b, а булева алгебра с введенным таким образом расстоянием называется булевым пространством. С помощью понятия расстояния определяются понятия конгруэнтности и движения в булевом пространстве.

Тройка попарно различных элементов a, b, c булева пространства, для которых $d(a, b) + d(b, c) = d(a, c)$, называется B-линейной (от слова between — между), а элемент b называется находящимся между a и c. Показывается, что B-линейность эквивалентна соотношению $ab + bc = b = (a + b)(b + c)$.

Совокупность m попарно различных элементов (m-элемент») $a_1, a_2, \ldots, a_m$ булева пространства называется B-линейной, если эти элементы можно упорядочить таким образом, что всякая тройка элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$, для которой $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant m$, B-линейна; m-элемент $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется псевдо-B-линейным, если всякая тройка его элементов B-линейна, а весь m-элемент не B-линеен; m-элемент $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется D-линейным, если эти элементы можно упорядочить таким образом, что $d(a_1, a_m) = d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) + \ldots + d(a_{m-1} a_m)$. B-линейность m-элемента влечет за собой D-линейность, но не обратно: примером D-линейной, но не B-линейной четверки элементов является a, b, ab и $a + b$, если все эти элементы попарно различны, так как $d(a, a + b) + d(a + b, ab) + d(ab, b) = d(a, b)$. Эта же четверка является примером псевдо-B-линейной, но не B-линейной четверки.

Четверка попарно различных элементов a, b, c, d булева пространства называется C-четверкой, если

тройки a, b, c; b, c, d; c, d, a; d, u, b B-линейны. Показывается, что четверка элементов псевдо-B-линейна, тогда и только тогда, если эти элементы можно упорядочить в виде C-четверки. Показывается, что для каждой четверки элементов a, b, c, d булева пространства, в которой элементы a, c и b, d противоположны, имеет место неравенство $d(a, b) \times \times d(c, d) + d(a, c) \cdot d(b, d) \geqslant d(a, d) \cdot d(b, c)$.

Для m-элементов при $m > 4$ показывается, что если все тройки элементов такого m-элемента B-линейны, m-элемент также B-линеен.

Булево пространство является коммутативной группой относительно операции $d(a, b)$ (и кольцом относительно операций $d(a, b)$ и $a \cdot b$). Показывается, что всякая функция $g(a, b)$, отображающая пары элементов булева пространства на это же пространство, являющаяся групповой операцией и обладающая свойствами обычного расстояния ($g(a, b) = 0$ тогда и только тогда, если $a = b$, $g(a, b) = g(b, a)$, $g(a, b) + g(b, c) \geqslant g(a, c)$), совпадает с расстоянием $d(a, b)$. *Б. А. Розенфельд*

2873. **Теорема в N-мерном проективном пространстве, эквивалентная коммутативности.** **Лейсеринг** (A theorem in projective N-space equivalent to commutativity. Leisenring Kenneth B.), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 1, 35—40 (англ.)

Пусть S_n — n-мерное проективное пространство ($n > 1$), определенное только аксиомами связи. Множество P, состоящее из s точек p_i, называется зависимым, если оно принадлежит подпространству размерности t, где $t < s - 1$. Наименьшее из чисел t называется рангом множества P. Доказывается, что пространство S_n можно координатизировать с помощью поля тогда и только тогда, если в нем справедливо следующее конфигурационное предложение:

Пусть в некоторой гиперплоскости $H_0 \subset S_n$ выбрано такое множество T, состоящее из $n+1$ точек t_i, что каждое его собственное подмножество независимо; обозначим через $A_k^m = A_m^k$, $k \neq m$, подпространство, определенное множеством $T \setminus (t_k \cup t_m)$, и проведем через A_k^m гиперплоскости H_k^m и H_m^k, отличные друг от друга и от H_0; пусть множество P точек $p_k = \bigcap_{m \neq k} H_k^m$, $k = 1, \ldots, n+1$, зависимо. Тогда множество точек $q_m = \bigcap_{k \neq m} H_m^k$, $m = 1, \ldots, n+1$, также зависимо и имеет тот же ранг, что и P. В части достаточности высказанная теорема явно не сформулирована. Упомянутое выше конфигурационное предложение при $n = 2$ превращается в теорему Паппа. Доказательство основной теоремы базируется на исчислении Грассмана. *Л. А. Скорняков*

2874. **Геометрия инцидентности.** **Уайлер** (Incidence geometry. Wyler Oswald), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 601—610 (англ.)

На множестве элементов (точек) задана геометрия инцидентности, если из него выделена совокупность подмножеств, называемых плоскостями, так, что выполняются аксиомы: IG 1. Если A, B, C — три различные точки, то существует плоскость, содержащая точки A, B, C; IG 2. Если α и β — две различные плоскости, то $\alpha \setminus \beta$ не пусто; IG 3. Если A, B, C — различные точки, α, β, γ — различные плоскости, $A \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$, $B \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$, $C \in \alpha \cap \beta$, то $C \in \gamma$; IG 4. Если A, B, C, D, E — различные точки, не лежащие в одной плоскости, A, B, C, D лежат в одной плоскости, то существует такая точка $F \neq E$, что A, B, E, F лежат в одной плоскости и C, D, E, F лежат в одной плоскости; IG 5. Существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Этим определением не исключаются и бесконечномерные геометрии инцидентности. Прямой называется множество общих точек двух различных плоскостей, имеющих две общие точки. Множество точек называется «плоским» (flat), если вместе с каждыми двумя точками оно содержит проходящую через них прямую и вместе с каждыми тремя точками, не лежащими на одной прямой,— проходящую через них плоскость. Совокупность всех «плоских» множеств, упорядоченная с помощью отношения теоретико-множественного включения, образует полную структуру. Знаки $\bigcup$, $\bigcap$, употребляются далее в смысле теории структур.

Теорема. Для того чтобы структура L была изоморфна структуре всех «плоских» множеств геометрии инцидентности, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) L — полная структура; 2) если $a \in L$, p и q — точки L, то $a < a \cup p \leqslant a \cup q$ влечет $q \leqslant a \cup p$; 3) если S — множество точек L, p — точка L, $p \leqslant \bigcup S$, то существует конечное множество $T \subseteq S$ такое, что $p \leqslant \bigcup T$; 4) если $b < a$, то существует такая точка p структуры L, что $b < b \cup p \leqslant a$; 5) в L существует четыре точки p_1, p_2, p_3, p_4 такие, что объединение любых трех из них меньше $p_1 \cup p_2 \cup p_3 \cup p_4$; 6) если p — точка L и если $a, b \in L$ таковы, что $p \leqslant a \cap b$, то a и b образуют модулярную пару, т. е. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c$ для любого $c \leqslant a$ (элемент p называют точкой структуры L, если не существует $q \in L$ такого, что $p > q$).

На множестве элементов (точек) задана проективная геометрия, если из него выделена совокупность подмножеств, называемых прямыми, так, что удовлетворяются аксиомы: PG 1. Если A и B — различные точки, то существует точно одна прямая, содержащая A и B; PG 2. Если A, B, C, D, E — пять различных точек, не лежащих на одной прямой, точки A, C, D лежат на одной прямой и точки B, C, E лежат на одной прямой, то существует точка F такая, что A, B, F лежат на прямой и D, E, F лежат на прямой; PG 3. Каждая прямая содержит две различные точки; существуют три точки, не лежащие на одной прямой. Обычным способом можно ввести проективную геометрию в связке прямых геометрии инцидентности. В работе даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы из данной геометрии инцидентности путем присоединения несобственных точек можно было получить проективную геометрию. Оказывается, в частности, что для этого достаточно, чтобы геометрия инцидентности была более чем трехмерна.

В работе рассматриваются также неприводимые геометрии инцидентности, т. е. геометрии, в которых из любой точки произвольной плоскости исходит по меньшей мере три различных прямых, лежащих в этой плоскости. Показывается, например, что в неприводимой геометрии инцидентности из каждой точки любой плоскости исходит одинаковое число прямых, лежащих в этой плоскости. *В. А. Ефремович, А. С. Шварц*

2875. К проблеме трансверсалей. Часть I. Прямые в R_3, R_4 и R_5. Вейценбёк (Zum Transversalenproblem. Teil I: Geraden im R_3, R_4 und R_5. Weitzenböck Roland), Monatsh. Math., 1953, 57, № 3, 185—198

Проблема трансверсалей состоит в эффективном определении конечного числа τ_d d-мерных подпространств R_d проективного пространства R_n, пересекающих заданные $(d+1)(n-d)$ пространств R_{n-d-1} общего положения.

Так, при $n=3$ существуют две прямые (трансверсали), пересекающие четыре заданные прямые 1^2, 2^2, 3^2, 4^2. Пусть $(ABCD)$, (ABs^2), (r^2, s^2) и т. п. обозначает определитель, составленный из координат точек A, B, C, D и т. п. (если в скобке указана прямая, то берутся координаты точек, ее определяющих). Точка $A=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2$, в которой трансверсаль пересекает прямую 1^2, находится из соотношения

$$R_{234}(A)=\begin{vmatrix}(AB_1 3^2) & (AB_1 4^2)\\ (AB_2 3^2) & (AB_2 4^2)\end{vmatrix}=0$$

(здесь A_1, A_2 и B_1, B_2 — точки, определяющие соответственно прямые 1^2 и 2^2).

Условие того, что для пяти прямых 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 существует общая трансверсаль, имеет вид:

$$\Delta_{12345}=\begin{vmatrix}0 & (1^2 2^2) & (1^2 3^2) & (1^2 4^2) & (1^2 5^2)\\ (2^2 1^2) & 0 & (2^2 3^2) & (2^2 4^2) & (2^2 5^2)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (5^2 1^2) & (5^2 2^2) & (5^2 3^2) & (5^2 4^2) & 0\end{vmatrix}=0 \quad (1)$$

Рассмотрим в R_4 прямые $1^2, 2^2, \dots, 6^2$. Обозначим через $\Delta_{23456}(A)$ определитель, аналогичный (1), у которого везде (r^2, s^2) заменено через $(Ar^2 s^2)$. Условие $\Delta_{23456}(A)=0$ определяет пять точек на прямой 1^2, через которые проходят плоскости, пересекающие все шесть прямых.

Аналогично рассматривается случай восьми прямых в R_5. Вполне обозримого результата, однако, не получено.

Автор разъясняет на примерах связь решаемой задачи с понятием ассоциированных пространств. Так, пять трансверсальных плоскостей к шести прямым в R_4 являются ассоциированными — они соответствуют точкам пересечения грассманова многообразия всех ∞^6 плоскостей (вложенного естественным образом в R_9) с линейным R_3. *И. З. Розенкноп*

2876. Теорема о голономии. Амброз, Сингер (A theorem on holonomy. Ambrose W., Singer I. M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 3, 423—443 (англ.)

Работа относится к теории косых произведений (расслоенных пучков). Авторы используют понятия и концепции Шевалле (Теория групп Ли, Изд-во иностр. лит-ры, 1948), Стинрода (РЖМат, 1953, 627), Черна, А. Картана, Эресмана.

Пусть $\mathfrak{B}=(B, M, G, \pi, \Phi)$ — главное косое произведение с пространством произведения B, базой M (пространство слоев), слоем и группой G, проекцией π, семейством координатных преобразований Φ. Все пространства предполагаются дифференцируемыми многообразиями, отображения предполагаются дифференцируемыми.

Говорят, что в $\mathfrak{B}$ задана связность H, если каждому $b\in B$ отнесено линейное подпространство H_b касательного пространства B_b так, что:

1) H_b является линейным дополнением касательного пространства V_b к слою, содержащему точку b;

2) система подпространства H_b инвариантна относительно группы G (действующей в B как группа правых переносов);

3) H_b зависит от b дифференцируемым образом.

Векторы из V_b и H_b будем называть соответственно вертикальными и горизонтальными. Обозначим через Vt и Ht соответственно вертикальную и горизонтальную составляющие вектора $t\in B_b$.

Авторы дают определения группы голономии и кривизны для главного косого произведения с заданной связностью. Эти определения сводятся к обычным, если с многообразием M связать главное косое произведение $E(M)$, точками которого служат наборы $(m, e_1, \dots, e_d)$, где m — точка M, $e_1, \dots, e_d$ — некоторый базис касательного пространства к M в точке m (топология и координатные преобразования вводятся естественным образом).

Группой голономии $G(b)$, отнесенной к точке $b\in B$, называется совокупность таких $g\in G$, что bg (результат применения к b правого переноса, порожденного g) может быть соединен с b кусочно гладкой горизонтальной кривой (т. е. такой, что касательный вектор к ней горизонтален во всех точках, где он существует). Если эту кривую можно выбрать так, чтобы ее проекция в M была гомотопна нулю, то g считается принадлежащим нулевой группе голономии $G_0(b)$.

Пусть $\theta=6^p$ — внешняя дифференциальная форма на B порядка p, принимающая значения в конечномерном векторном пространстве. Ее ковариантная производная $D\theta$ определяется формулой

$$D\theta(t_1, \dots, t_{p+1})=d\theta(Ht_1, \dots, Ht_{p+1}),$$

где $t_1, \dots, t_{p+1}\in B_b$, d обозначает внешнее дифференцирование. Рассмотрим форму ω 1-го порядка, относящую каждому $t\in B_b$ элемент алгебры Ли L группы G (левоинвариантное векторное поле на G), соответствующий $V(t)$. Ее ковариантная производная $\Omega=D\theta$ называется формой кривизны, отвечающей данной связности H.

Показывается, что

$$d\omega(s, t)=-\frac{1}{2}[\omega(s), \omega(t)]+\Omega(s, t)$$

Пусть $B(b)$ обозначает совокупность точек B, которые можно соединить с b кусочно-гладкой горизонтальной кривой. Основная теорема авторов: Пусть $L(b)$ — подалгебра L, порожденная всеми $\Omega(s, t)$, где s и t пробегают все пары касательных векторов к B во всех точках $B(b)$. Тогда подгруппа G, порожденная $L(b)$, есть $G_0(b)$.

И. З. Розенкноп

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

2877. Цилиндрическая кривая с наибольшей длиной и наибольшей высотой. Форт (A cylindr-

ical curve with maximum length and maximum height. Fort M. K., Jr), Quart J. Math., 1953, 4, № 16, 314—320 (англ.)

Грин (Green J. W., Amer. Math. Monthly, 1953, 60, 30—31) рассматривает на прямом круговом цилиндре единичного радиуса класс кривых C диаметра 2, имеющих с каждой образующей единственную общую точку C. Высотой кривой C называется наименьшее расстояние между плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндра, между которыми находится кривая C. Если $L(C)$ и $H(C)$ соответственно длина и высота C, то Грином установлены оценки:

$$2\pi \leqslant L(C) \leqslant 2\pi\sqrt{2},$$

$$0 \leqslant H(C) < \sqrt{2}$$

и построена кривая C, для которой $H(C) = \sqrt{2}$. Им же поставлены вопросы: 1) существуют ли в рассматриваемом классе кривые с длиной $2\pi\sqrt{2}$, 2) какова точная верхняя граница суммы $H(C) + L(C)$. Автор строит кривую C, для которой $H(C) = \sqrt{2}$ и $L(C) = 2\pi\sqrt{2}$, и тем самым сразу решает оба вопроса.

Кривая C конструируется так: на отрезке $[0, \pi/2]$ берется функция $F(x) = 2\sin(x/2)$. Затем строится последовательность непрерывных функций $g_0(x), g_1(x), \ldots$, графики которых получаются посредством параллельных переносов и отражений надлежаще выбранных кусков графика функции $F(x)$. Эти функции $g_n(x)$, кроме того, удовлетворяют еще следующим требованиям: 1) $g_n(0) = 0$ и $g_n(\pi/2) = \sqrt{2}$, 2) для всех n $|g_n(u) - g_n(v)| \leqslant 2|\sin[(u - v)/2]|$, где $u, v \in [0, \pi/2]$, 3) функции $g_n(u)$ равномерно сходятся к некоторой непрерывной функции $f(x)$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty} L(g_n) = L(f) = \sqrt{2}\,\pi/2$, где $L(g_n)$ — длина графика функции $g_n(x)$. Функция $f(x)$ распространяется потом на отрезок $[0, \pi]$ так: $f(\pi - x) = f(x)$. На $[0, 2\pi]$ $f(x)$ распространяется как периодическая функция с периодом π. В результате свертывания в прямой круговой цилиндр полосы плоскости x, y между параллельными прямыми $x = 0$, $x = 2\pi$ график кривой f переходит в искомую кривую C. Действительно, из (1) следует, что $H(C) = \sqrt{2}$, а из (4) — что $L(C) = 2\pi\sqrt{2}$.

И. Я. Бакельман

2878. Множества дуг одного и того же круга в их связи с множествами выпуклых тел евклидовой плоскости. Винченсини (Les ensembles d'arcs d'un même cercle dans leurs relations avec les ensembles de corps connexes du plan euclidien. Vincensini Paul), Atti IV congr. Union mat. ital., 1953, 2, 456—464 (франц.)

По теореме Хелли — Банаха — Радона (Helly — Banach — Radon), если тела из некоторого множества выпуклых тел n-мерного евклидова пространства E_n, для каждой группы из $n+1$ тел, имеют по крайней мере одну общую точку, то все они имеют по крайней мере одну общую точку.

Эта теорема влечет за собою другие по отношению к h-мерным линейным многообразиям L_h $(h \leqslant n-1)$ в E_n.

Рассматривая вместе с некоторым множеством $(\mathcal{E})$ выпуклых тел из E_n данное линейное многообразие L_h этого пространства и предполагая, что существует по крайней мере одно h-мерное линейное многообразие, параллельное L_h и пересекающее всякую группу из $n-h+1$ составляющих тел, автор доказывает, что существует по крайней мере одно h-мерное линейное многообразие, параллельное L_h, пересекающее все тела множества $(\mathcal{E})$.

Отсюда ставится вопрос: Если даны E_n и целое число $h \leqslant n-1$, существует ли и как найти такое целое число p, что при условии: каждая группа p тел некоторого множества выпуклых тел из E_n допускает по крайней мере одно общее секущее h-мерное линейное многообразие, то все они допускают одно общее секущее многообразие.

Ограничиваясь множествами евклидовой плоскости E_2, автор сводит поставленный вопрос к рассмотрению выпуклых множеств направлений в E_2 (C. r. Acad. sci., 1948, 232, 2075—2076).

Пусть C_2 и C_3 — два каких-либо выпуклых тела в E_n. Прямые D, связывающие точку M_1 из C_1 с точкой M_2 из C_2, определяют выпуклое множество направлений.

Изучение этих множеств связывается с исследованиями Хорна (Horn A., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 923) о множествах дуг данного круга Г.

Доказываются теоремы:

1. Дано множество дуг γ круга Г так, что каждая тройка их имеет по крайней мере одну общую точку; тогда существует на Г по крайней мере одна инволюция такая, что каждая из дуг γ содержит по крайней мере одну из пары сопряженных точек p, q.

2. На плоскости P дано собрание $\mathcal{E}(e)$ выпуклых множеств направлений (e), где каждая тройка множеств допускает по крайней мере одно общее направление. Если Ф есть пучок прямых плоскости P с центром в O, то в пучке Ф существует хотя бы одна инволюция I, так что все множества (e) из собрания $\mathcal{E}(e)$ содержат по крайней мере одно направление, параллельное тому или другому из двух сопряженных относительно инволюции I направлений Op, Oq пучка Ф.

3. Если существует хотя бы одно направление Op в плоскости P, не принадлежащее ни одному из множеств (e), то существует в P по крайней мере одно Oq, принадлежащее им всем.

4. Если выпуклые тела C_i евклидовой плоскости для каждой четверки тел допускают общую секущую, то они все допускают общую секущую.

С. Д. Россинский

2879 Д. Теория несобственных гиперполос в центральном аффинном пространстве. Тарасов И. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Саратовск. ун-т, Саратов, 1954

2880 Д. Об однозначной определенности выпуклых поверхностей. Сенькин Е. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем.н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1954

См. также: 2485, 2508, 2603, 2605, 2606, 2613, 2614

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

2881. О сходимости решения разностного уравнения к решению уравнения диффузии. Хункоса, Янг (On the convergence of a solution of a difference equation to a solution of the equation of diffusion. Juncosa M. L., Young David), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 168—174 (англ.)

Методом конечных разностей ищется решение уравнения диффузии

$$\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial l^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad t \geqslant 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям: $u(x,+0) = f(x)$, $u(+0, t) = u(1-0, t) = 0$, $t > 0$. Относительно $f(x)$ предполагается, что она непрерывна в $[0, 1]$, исключая ограниченное число точек, в которых возможен конечный разрыв, и удовлетворяет условию $\int_0^t [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]\,du = o(t)$ для каждого x в $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x \exp(-n^2\pi^2 t)$, $a_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x\,dx$ есть точное решение (1). Прямоугольная сетка строится с шагами $\Delta x = M^{-1}$ и $\Delta t = r(\Delta x)^2$, M—целое число. Тогда явным решением разностного аналога (1)

$$U_M(x, t+\Delta t) - U_M(x,t) = r[U_M(x+\Delta x, t) + U_M(x-\Delta x, t) - 2U_M(x,t)], \qquad (2)$$

удовлетворяющим краевым условиям: $U_M(0,t) = U_M(1,t) = 0$, $t \geqslant 0$, и начальным условиям: $U_M(x,0) = f(x)$ (Mx — целое), будет выражение:

$$U_M(x,t) = \sum_{n=1}^{M-1} b_n \sin n\pi x \left[1 - 4r\sin^2(n\pi/2M)\right]^{\frac{tM^2}{r}} \qquad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{M}\sum_{j=1}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right)\sin\frac{n\pi j}{M}.$$

Кроме решения (3), рассматривается решение уравнения (2) вида

$$V_M(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \left[1 - 4r\sin^2(n\pi/2M)\right]^{\frac{tM^2}{r}} \qquad (4)$$

Сходимость $V_M(x,t)$ к $u(x,t)$ при $M \to \infty$ была доказана (Leutert W. W., J. Math. and Phys., 1952, **30**, 245—251) для случая: $0 < r \leqslant 1/4$, $|c_n - a_n| \to 0$ равномерно для $n < M$, $f(x)$ кусочно-непрерывна и всюду имеет одностороннюю производную. Сходимость $U_M(x,t)$ к $u(x,t)$ при $M \to \infty$ была доказана (Hildebrand F. B., J. Math. and Phys., 1952, **31**, 35—41) для случая: $0 < r < 1/2$, $f(x)$ имеет ограниченное изменение и непрерывна, за исключением конечного числа скачков (для $r = 1/2$ требования на $f(x)$ еще более жесткие). В реферируемой статье доказывается сходимость (3) к (1) для $0 < r \leqslant 1/2$ и сходимость (4) к (1) для всех $r > 0$. Даются:

Теорема 1. Для любого фиксированного $t_0 > 0$ и для $0 < r \leqslant 1/2$ $\lim_{M\to\infty} U_M(x,t) = u(x,t)$ равномерно для $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $t \geqslant t_0 > 0$.

Теорема 2. Пусть $c_n = c_n(M)$ в (4) таково, что $c_n = 0$ для $n > k$ (где $k = k(M,r,\beta) = \begin{cases} [M/3], & 0 < r \leqslant 1/2, \\ [(2M/\pi)\arcsin(\beta/4r)^{1/2}], & r > \frac{1}{2}, \end{cases}$ β — произвольное фиксированное число, $0 < \beta < 1$, $[x]$ означает наибольшее целое число, не превышающее x) и $\lim_{M\to\infty} |c_n - a_n| = 0$ равномерно для $n \leqslant k$. Тогда для каждого $r > 0$ $\lim_{M\to\infty} V_M(x,t) = u(x,t)$ равномерно в $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $t \geqslant t_0 > 0$.

Для дальнейшего вводится понятие четырехточечной интерполяции. Если P_1, P_2, P_3 и P_4 — узлы элементарной ячейки разностной сетки и $\alpha_i(x,t) \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, — функции такие, что $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$, то для $W(P)$, заданной на узлах сетки, полагают $\overline{W}_M(x,t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(x,t) W_M(P_i)$, где $\overline{W}_M(x,t)$ удовлетворяет принципу максимума — минимума. Тогда имеют место:

Теорема 3. Если $\overline{U}_M(x,t)$ есть четырехточечная интерполяция $U_M(x,t)$, удовлетворяющая принципу максимума—минимума, тогда $\lim_{M\to\infty} \overline{U}_M(x,t) = u(x,t)$ равномерно в I ($0 \leqslant x \leqslant 1$) и $t \geqslant t_0 > 0$. Кроме того, равномерно в $I - IE$ $\lim_{M\to\infty} U_M(x,0) = f(x)$ (E есть конечная система интервалов, покрывающих точки разрыва $f(x)$).

Теорема 4. Если $V_M(x,t)$ есть четырехточечная интерполяция $V_M(x,t)$, удовлетворяющая принципу максимума—минимума, и если $\lim_{M\to\infty} |c_n - a_n| = 0$ равномерно для $n \leqslant k$, то $\lim_{M\to\infty} \overline{V}_M(x,t) = u(x,t)$ равномерно в $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $t \geqslant t_0 > 0$. *Л. М. Камынин*

2882. Замечания к численному решению задачи Дирихле для общих границ. Фельберг (Bemerkungen zur numerischen Behandlung des Dirichletschen Problems für allgemeinere Ränder. Fehlberg Erwin), Acta math., 1954, **91**, № 1—2, 51—74 (нем.)

Ищется численное решение задачи Дирихле для дифференциального уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = l(x,y). \qquad (1)$$

Граничная кривая предполагается замкнутой, без точек самопересечения и такой, что существует эллипс с главными осями, параллельными координатным осям, содержащий внутри себя эту кривую, причем радиус-вектор, проведенный из центра эллипса к граничной кривой, является однозначной функцией полярного угла. Из всех возможных эллипсов выбирается наиболее тесно облегающий граничную кривую извне. Аффинным преобразованием эллипс отображается на единичный круг, содержащий внутри себя образ граничной кривой. Уравнение (1) переходит при этом в

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + A\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = f(\xi,\eta), \qquad (2)$$

где $A \geqslant 1$ — постоянная.

Предполагая существование и единственность решения $z(\xi, \eta)$ задачи Дирихле, автор разлагает $f(\xi, \eta)$ и $z(\xi, \eta)$ в двойные ряды по многочленам Лежандра

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i,\ k} F_{ik} P_i(\xi) P_k(\eta), \qquad (3)$$

$$z(\xi, \eta) = \sum_{l,\ m} Z_{l,\ m} P_l(\xi) P_m(\eta). \qquad (4)$$

В дальнейшем предполагается, что $f(\xi, \eta)$ и граничные значения настолько гладки, что в (3), (4) можно ограничиться $i = 0, 1, 2, 3, 4$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; $i+k \leqslant 4$; $l = 0, 1, 3, 4, 5, 6$, $m = 0, 1, \ldots, 6$; $l + m \leqslant 6$. Подставляя (3) и (4) в (2) и сравнивая коэффициенты при многочленах Лежандра, получают систему 15 линейных уравнений для 28 коэффициентов $Z_{l,\ m}$.

Недостающие 13 уравнений получаются использованием краевых условий. Для этого тригонометрической интерполяцией $z = C_0 + \sum_{n=1}^{5} [C_n \cos n\pi\tau + S_n \sin n\pi\tau] + C_6 \cos 6\pi\tau$ краевые значения на первоначальной граничной кривой переносятся на окружность единичного круга и затем для уравнения (2) ищется решение задачи Дирихле в единичном круге, удовлетворяющее на границе круга новым краевым условиям. Рассматривая (3) на окружности круга и сравнивая коэффициенты при тригонометрических функциях, получают недостающие 13 линейных уравнений относительно $Z_{l,\ m}$. Полученное таким образом первое приближение $z^{(1)}(\xi, \eta) = \Sigma_{l,\ m} Z^{(1)}_{l,\ m} P_l(\xi) P_m(\eta)$, вообще говоря, не удовлетворяет краевым условиям вдоль первоначальной граничной кривой. Поэтому далее ищется такое решение $\tilde{z}(\xi, \eta) = \Sigma_m a_m r'^m \cos m\varphi' + \Sigma_n b_n r'^n \sin n\varphi'$ однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + A \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0, \qquad (5)$$

чтобы разность значений $z^{(1)}(\xi, \eta) - \tilde{z}(\xi, \eta)$ в точках первоначальной граничной кривой $\varphi = 0°, 15°, 30°, \ldots, 345°$ была наименьшей. Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_6$; $b_1, b_2, \ldots, b_5$ ищутся методом наименьших квадратов. Получающаяся система 12 уравнений с 12 неизвестными допускает упрощения в случае симметрии границы относительно одной или обеих осей координат.

После определения a_m и b_n, $m = 0, 1, 2, \ldots, 6$, $n = 1, \ldots, 5$, получают решение однородного уравнения (5) $\tilde{z}(\xi, \eta) = \sum_{l+m \leqslant 6}^{6} \tilde{Z}_{l,\ m} P_l(\xi) P_m(\eta)$ в виде двойного ряда по многочленам Лежандра. Искомое численное решение задачи Дирихле имеет вид $z(\xi, \eta) = z^{(1)}(\xi, \eta) + \tilde{z}(\xi, \eta)$. Изложение метода решения иллюстрируется числовым примером. В работе не дано оценки разности точного и приближенного решения. *Л. И. Камынин*

2883. **Численное решение эллиптических разностных уравнений матричными методами. Карлквист** (Numerical solution of elliptic difference equations by matrix methods. Karlqvist Olle), Tellus, 1952, **4**, 374—384 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Развит прямой (неитерационный) метод решения граничных задач для эллиптических разностных уравнений, основанный на простой структуре треугольных матриц, получаемых применением хорошо известного способа исключения Гаусса к матрице разностного уравнения. Доказывается, что этот способ численно устойчив, т. е. не приводит к возрастанию ошибки. Метод, повидимому, особенно годится для таких задач как предсказание погоды при применении быстродействующих счетных машин, где одни и те же уравнения (например, Пуассона или Гельмгольца) решаются для большого числа моментов времени с той же самой сеткой, но различными правыми частями и граничными значениями. Число запоминаемых констант, так же как и вычислительная работа при применении метода, составляют только часть того, что требуется при использовании обратной матрицы (функции Грина). Подробно изучено уравнение Пуассона для прямоугольника, но метод может быть применен к другим областям и к уравнениям более высокого порядка. (Резюме автора.) *H. Polachek*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 166.

2884. **Численное решение некоторых дифференциальных уравнений, встречающихся в теории Крокка ламинарного пограничного слоя. Керкби, Нонуэйлер** (The numerical solution of certain differential equations occurring in Crocco's theory of the laminar boundary layer. Kirkby S., Nonweiler T.), Coll. Aeronaut. Cranfield Rep., № 74, 1953, 9 pp. (англ.)

Описывается численный метод решения некоторых дифференциальных уравнений, которые получаются при применении преобразования Крокка к уравнениям ламинарного пограничного слоя, соответствующим большим числам Маха (т. е. сверхзвуковые скорости). Решение получено последовательным применением быстро сходящегося релаксационного процесса к системе из двух дифференциальных уравнений, для которых одним из граничных условий является значение первой производной. Число Прандтля входит как параметр. (Резюме авторов.) *H. Polachek*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 165

2885. **Численное интегрирование уравнения Шредингера в случае потенциала Юкава. Лаурикайнен, Эуранто** (Beiträge zur numerischen Behandlung der Schrödinger-Gleichung im Falle des Yukawa-Potentials. Laurikainen Kalervo V., Euranto Erkki K.), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 2, 155—158 (нем.)

См. РжФиз, 1954, 3413.

2886. **Вычисление интеграла $\int_0^\infty e^{-u^3 - x/u} du$. Абрамовиц** (Evaluation of the integral $\int_0^\infty e^{-u^3 - x/u}\, du$. Abramowitz Milton), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 188—192 (англ.)

Функция

$$f_m = \int_0^\infty u^m\, e^{-u^3 - x/u}\, du$$

($m = 0, 1, 2\ldots$) встречается в различных физических проблемах, в которых малые частицы имеют максвелловское распределение скоростей. Во введении указывается, что функция $f_m(x)$ протабулирована для значений $m = 1, 2, 3$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $f_3(-iy)$ — для

$0 \leqslant y \leqslant 20$. Дается краткая характеристика некоторых работ, связанных с вычислением $f_m(x)$. В реферируемой работе автор получает сходящиеся и асимптотические ряды для случая $m = 0$, указывая, что использованные им методы могут быть перенесены без изменений на общий случай. Так,

$$f_0(x) = f(x) = \frac{V\overline{\pi}}{2} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left\{\frac{1}{2}\psi(n+1) + \psi(2n+2) - \ln x\right\}}{n!\,(2n+1)!} x^{2n+1} -$$

$$- V\overline{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)\,[(2n+2)!]} x^{2n+2},$$

где $\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma$, γ — постоянная Эйлера, и $f(x) = \sqrt{\pi/3}\,\exp\{-3(x/2)^{2/3}\} \times \left\{1 - \frac{1}{36}\left(\frac{2}{x}\right)^{2/3} + \frac{25}{2592}\left(\frac{2}{x}\right)^{4/3} - \frac{1225}{279936}\left(\frac{2}{x}\right)^{2} + \cdots\right\}$.

В заключение приводится асимптотическое разложение для $f_m(x)$ с целью исправления ошибки, допущенной в работе Лейпорта (Laporte O., Phys. Rev., 1937, 52, 72). *К. А. Карпов*

2887. Численное дифференцирование табличных функций. Джордан (Differentiation of experimental data. Jordan Peter F.), J. Aeronaut. Sci., 1954, **21**, № 6, 417 (англ.)

2888. Нахождение периодичностей. Яношши (Periodicitások keresése. Jánossy Lajos), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, **3**, № 1, 7—25 (венг.)

Рассматриваются вопросы вскрытия периодичностей, содержащихся в данном числовом материале наблюдений. Автор предлагает новый метод вскрытия периодичностей, аналогичный методу Шмидта (Schmidt W., Meteorolog. Z., 1911, 40 1; 1913, 392), но свободный от недостатков последнего метода. Автор заменяет процесс последовательного интегрирования функций, имеющий место в методе Шмидта, суммированием, производя над анализируемым материалом, представляющим собой ряд эквидистантных величин $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$, следующие итерации. Взяв среднюю $\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} y_\nu$, определяют отклонения $\eta_\nu^{(0)} = y_\nu - \overline{y}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, затем берут последовательные суммы η_0, $\eta_0 + \eta_1$; $\eta_0 + \eta_1 + \eta_2$; ... ...; $\eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_{N-1}$, после чего берут среднюю этих величин $\overline{y}^{(1)}$, а затем определяют отклонения их от этого среднего $\eta_0^{(1)}, \eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)} \ldots$ и т. д.

Автор показывает, что если данные числа имеют вид $y_\nu = \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{i\omega k\nu}$, где $\omega = 2\pi/N$; A_k и A_{N-k} суть сопряженные комплексные числа, то в результате m вышеуказанных итераций получается следующий результат:

$$\eta_\nu^{(2m)} = (-1)^m \sum_{k=1}^{N-1} \frac{A_k}{\left(2\sin\frac{1}{2}\omega k\right)^{2m}} e^{i\omega k\nu},$$

т. е. в результате получается также сумма гармоник. Однако амплитуды гармоник будут уже изменены, а именно будут равны $A_k\left(2\sin\frac{1}{2}\omega k\right)^{-2m}$. Гармоника с наименьшей круговой частотой ωk будет при достаточно большом m доминировать над остальными и может быть выявлена в результате вычислений; после этого ее можно отсеять и получившийся остаток вновь подвергнуть процессу итераций. Приводится соответствующий пример вычислений и графиков.

Из других методов вскрытия периодичностей автор рассматривает еще метод Фуриха (J. Furich), базирующийся на установлении автокорреляционных свойств между числами анализируемого материала в случае, если они содержат периодичности. Критикуя этот метод, автор приходит к выводу, что применяемая Фурихом итерация не может быть рекомендована для практического применения. *М. Г. Серебренников*

2889. Ортогональные полиномы и их применение к математическому представлению экспериментальных явлений. Аренд (Les polynomes orthogonaut et leur utilisation dans la représentation mathématique des phénomènes expérimentaux. Arend S.), Rev. techn. luxembourg., 1954, **46**, № 1, 17—27 (франц.)

Статья посвящена использованию «краковского алгоритма», принципы которого были изложены в работах Т. Банахевича, а также в статье автора (Ciel et Terre, 1941, **57**, № 12).

Внимание уделено преимущественно квадратической интерполяции с постоянным весом при данном (четном или нечетном) числе значений независимой переменной, иначе говоря, интерполяции Чебышева (см. Собр. соч., т. 2, стр. 236). Указанная техника проиллюстрирована числовым примером, который должен свидетельствовать о ее простоте, эффективности и надежности. *В. Л. Гончаров*

2890. Ортогональные полиномы и их применение к математическому представлению экспериментальных явлений. Аренд (Los polinomios ortogonales y su aplicacion en la representacion matematica de fenomenos experimentales. Arend S.), Urania (Madrid), 1953, **38**, № 235, 200—216 (исп.)

См. реф. 2889

2891. О табулировании строки Тейлора у функций трех переменных. Нейшулер Л. Я., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 5, 797—800

Указывается на возможность k-членного табулирования функции $v(x_1, x_2, x_3)$ с использованием строки Тейлора с членами до 2-го порядка включительно для вспомогательной функции $\Phi(v)$ в предположении, что $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ мало по сравнению с $\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}$. При этом в членах второго порядка опускаются слагаемые, которые содержат в качестве множителя $\frac{\partial\Phi}{dv}$.

В работе имеются опечатки. *К. А. Карпов*

2892. Прошлое и будущее математических таблиц. Флетчер (Mathematical tables past and future. Fletcher A.), Advancement Sci., 1954, **10**, № 40, 433—439 (англ.)

Доклад на математической секции Британской ассоциации (РЖМат, 1954, 3129). После краткого вступления о широком поле применения математических таблиц дается краткий обзор некоторых существующих таблиц, в основном многозначных базисных таблиц тригонометрических функций, логарифмов, показательной функции, бесселевых функций. Отмечается, что вычисление таких базисных таблиц является в большинстве случаев делом коллективного труда. Перечислены основные библиографические работы по таблицам.

В заключение автор высказывает мысль, что потребности в таблицах математических функций будут развиваться, расширяться и видоизменяться. *К. А. Семендяев*

2893. **Теоремы о погрешностях и их границах. Рейхарт** (Théorèmes sur les erreurs et incertitudes. Reichart Charles), Inform. scient., 1954, № 2, 46—49 (франц.)

Статья является дополнением к работе Кларри (РЖМат, 1954, 4588). Рассмотрены некоторые обстоятельства, которые надо иметь в виду при математической обработке результатов физического эксперимента в школьной практике. Особенно важно требование, выставленное ранее А. Н. Крыловым, не писать цифр, не заслуживающих никакого доверия. Указаны поправки к обычной формулировке теорем о границах погрешностей, необходимые в случаях, когда компоненты действия не независимы. *В. М. Брадис*

2894. **О счетных таблицах для механизированного учета и вычислительных работ. Беленький Н.,** Бухгалт. учет., 1954, № 8, 28—32

Рекомендуется использование специальных таблиц коэффициентов, существенно сокращающих работу на счетных машинах при вычислении по определенным формулам, так как отпадает необходимость совершать на счетных машинах те вычисления, результаты которых можно в готовом виде взять из таблиц. *А. Ф. Спасский*

2895. **Номограммы некоторых формул для проверки устойчивости компрессоров. Юрцолла** (Nomogrammi per la risoluzione di alcune formole per la verifica di stabilita di apparecchi a pressione. Jurzolla Ezio), Calore, 1953, **24**, № 12, 565—570 + 6—7 tav. (итал.)

Приводятся номограммы, составленные для ряда формул, взятых из другой работы автора, опубликованной в том же журнале. Номографируются формулы вида:

$$k = Yz / x, \quad Y = (0{,}55 - 0{,}0015\, t)\, R;$$

$$Y = Y_{20}\,[1 - 0{,}0015\,(t - 20)]; \quad k = pD / 200\, s;$$

$$i' = 0{,}18\,\frac{D + 2\,d}{H} + 0{,}03\,\frac{d}{s};$$

$$i'' = 0{,}25\,\frac{D}{H}\left\{1 + 0{,}00025\,\frac{D}{s}\cdot\left(\frac{D}{H}\right)^2\right\}.$$

Номограммы представляют из себя комбинации сеток помеченных линий. *И. Н. Денисюк*

2896. **Рациональные углы наклонов граней ограночных форм и метод их расчета. Витовский Б. В.,** Тр. Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1954, № 9, 367—378

Приводится сетчатая номограмма известной формулы: $\sin i / \sin r = n$, служащей для определения направления преломленного луча. Она состоит из концентрических окружностей, соответствующих показателям преломления n выходящих из центра лучей, соответствующих путям световых лучей в воздухе, и вертикалей, соответствующих путям световых лучей в минерале. *И. Н. Денисюк*

2897. **Расчет геликоидальной антенны. Содаро** (Helical antenna design. Sodaro Joseph), Radio and Telev. News. Radio-Electronic Engng Ed., 1954, **51**, № 2, 40 (англ.)

Номограмма типа «сдвоенные шкалы» для определения оптимальных значений 4 параметров геликоидальной антенны в зависимости от частоты, изменяющейся от 300 до 3000 *гц*. *И. Н. Денисюк*

2898 К. **Математическая обработка результатов измерений. Яковлев К. П.,** изд 2-е, 383 стр., М., Гостехиздат, 1953, 7 руб.

Книга является пособием по математической обработке экспериментальных данных и предназначена для широкого круга читателей (научных и инженерно-технических работников, а также студентов вузов). В ней рассматриваются основные методы, проверенные на практике, причем изложение сопровождается большим числом хорошо подобранных примеров, в основном из физики. Изложение весьма четкое и доступное. Отличительной чертой книги является то, что в ней все затронутые вопросы изложены с минимальным привлечением высшей математики. Вместе с тем читатель найдет в ней почти все сведения, необходимые при обработке экспериментальных данных. По главам материал распределяется следующим образом:

Обстоятельное введение к книге знакомит читателя с основными вопросами математической обработки результатов измерений.

Гл. 1 «Приближенные значения величин и их ошибки» посвящена общим понятиям теории погрешностей (понятие приближенного числа, округление, абсолютная и относительная ошибки, верные цифры и др.).

В гл. 2 «Основные арифметические действия с приближенными значениями чисел» рассматриваются практические приемы производства арифметических действий над приближенными числами.

Гл. 3 «Ошибки приближенных значений функций и общая теория ошибок» посвящена нахождению погрешностей функций и второй основной задаче теории погрешностей.

Гл. 4 «Закон нормального распределения случайных ошибок» содержит простейшие понятия теории вероятностей, вывод формулы ошибок (формула Гаусса) и сведения о вычислении интеграла вероятностей.

Гл. 5 «Показатели точности измерений» посвящена обоснованию постулата среднего арифметического на основании закона нормального распределения случайных ошибок, понятиям меры точности для значений ошибок, средне-квадратичным, вероятным и средним ошибкам измерений. Здесь же рассматриваются взвешенные измерения и исправление результатов измерений.

Гл. 6 «Основные приемы графического анализа результатов измерений». Здесь, наряду с простей-

шими вопросами по графической обработке экспериментальных данных, рассматриваются графическое дифференцирование и интегрирование, а также различные виды функциональных шкал.

В гл. 7 «Элементы номографии» на отдельных конкретных примерах излагаются способы построения и пользования некоторыми типами номограмм (сетчатые номограммы, номограммы из выравненных точек и зет-номограммы).

Гл. 8 «Основные приемы интерполирования» содержит простейшие сведения по точечному интерполированию (линейное и графическое интерполирование, понятие конечных разностей и исправление ошибочного значения в таблице, интерполяционные формулы Ньютона для случая равноотстоящих и неравноотстоящих ординат, точность интерполяционных формул).

Гл. 9 «Основы гармонического анализа» посвящена общей задаче гармонического анализа, практическому гармоническому анализу в случае 12 ординат, а также техническим приемам гармонического анализа.

Последняя гл. 10 «Эмпирические формулы» содержит изложение сведений по подбору эмпирических формул и нахождению их параметров (методы избранных точек, средних интерполяционных формул и наименьших квадратов). В приложении дана таблица значений интеграла вероятностей.

М. К. Керимов

2899 К. Численные методы в конформном отображении. Биркгоф, Янг, Чарантонелло (Numerical methods in conformal mapping. Birkhoff G., Young D. M., Zarantonello E. H., Proc. Symposia Appl. Math., vol. 4, Fluid dynamics, 117—140, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York — Toronto — London, 1953, 7.00 doll) (англ.)

Рассматривается численное приближение при помощи счетной машины функции, дающей конформное отображение на круг области, внутренней или внешней к гладкой кривой. Предложены модификации интегральных уравнений Теодорсена (Theodorsen, Nat. Advis. Comm. Aeronaut. Rep., 1931, № 411) и Гершгорина (Матем. сб., 1933, **40**, 48—58), к которым может быть сведена задача о конформном отображении, а также модификации разностных уравнений, употребляемых при вычислениях вместо интегральных уравнений. Дан новый метод решения задачи со свободными граничными условиями при помощи интегрального уравнения. Кроме того, дан обзор нескольких других методов; сходимость и вычислительные трудности различных методов оценены как аналитически, так и применительно к численному примеру. *C. Saltzer*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 258.

2900 К. Течение вязкой жидкости через трубы и каналы. Синг (Flow of viscous liquid through pipes and channels. Synge J. L., Proc. Symposia Appl. Math., vol. 4, Fluid dynamics, 141—165, McGraw-Hill Book Co, Inc., New York — Toronto — London, 1953, 7 doll.) (англ.)

Рассматривается численный способ определения функции $u(x, y)$, удовлетворяющей в области D уравнению Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ и такой, что u принимает заданные значения на части B_1 границы, а нормальная производная от u принимает заданные значения на остальной части B_2 границы. Такие задачи иллюстрированы 1) рассмотрением установившегося ламинарного потока несжимаемой вязкой жидкости через трубу и 2) изучением течений воды, вызываемых в канале ветром.

Автор получает приближенное решение, применяя свой прием гиперцикла и специальные «пирамидные функции». Это требует решения линейных конечноразностных уравнений методом последовательных приближений. Применяются множители «быстрой сходимости» для ускорения итерационного процесса.

Автор получает границу для среднего квадратичного отклонения градиента приближенного решения, а также границы для интеграла Дирихле точного решения. *E. Isaacson*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 257.

2901 Д. Численно-графическое решение некоторых уравнений аэродинамики. Стриженов С. И. Автореф. дисс. докт. тех. н., Ин-т механики АН СССР, М., 1954

2902 Д. Методика и некоторые вопросы организации математического практикума по приближенным методам анализа в высшей технической школе. Елистратова Т. А. Автореф. дисс. канд. пед. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1953

См. также: 2500, 2505, 2554, 2556, 2676 К, 2683, 2704, 2788, 2790, 2937; РЖФиз, 1954, 350

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2903. Комплексная алгебра для релейных цепей. Распанти (A complex algebra for relay circuits. Raspanti Matthew), Electr. Engng, 1953, **72**, № 11, 992—993 (англ.)

Рассматриваются соотношения для контактов, соединенных последовательно и параллельно с реагирующими органами элементов (например, обмотками реле). Обозначая совокупность цепей, воздействующих на данный реагирующий орган, комплексным выражением f_1+jf_2, где f_1 — цепи, последовательно соединенные с реагирующим органом, и f_2 — цепи, параллельно соединенные с реагирующим органом, автор дает следующие соотношения (соотношение (2) было получено ранее М. А. Гавриловым (Докл. АН СССР, 1949, **69**, № 2, 181—184).

$$f=j\bar{f}, \qquad (1)$$

$$(f_1+f_2)=f_1+j\bar{f}_2, \qquad (2)$$

$$(f_1+f_2)+jf_3=f_1+j(f_2\cdot\bar{f}_3),$$

$$j_1+j(f_2\cdot f_3)=f_1+f_2+jf_3,$$

где знаком сложения обозначается последовательное соединение, знаком умножения — параллельное соединение, а чертой — операция инверсии.

Далее рассматриваются цепи с переходными контактами. Отметив, что впервые вопрос о контактах, замыкающих или размыкающих цепи в момент перехода реле из одного положения в другое, был рассмотрен Монтгомери (Montgomerie G. A., J. Instn Electr. Engng, 1948, **95**, ч. 2, 355—364), автор утверждает, что к этим цепям целиком могут быть применены соотношения исчисления предложений.

Указывается, что контакт x_φ, размыкающий цепь в момент перехода, можно заменить параллельным соединением замыкающего x (нормально разомкнутого) и размыкающего x' (нормально замкнутого) контактов: $x \cdot x' = x_\varphi$. Контакт x_Λ, замыкающий цепь в момент перехода, нельзя физически осуществить посредством соединения обычных контактов, но можно представить в виде $x_\Lambda = jx_\varphi$. Поскольку $x_\varphi = \overline{x}_\Lambda$, то $x_\Lambda = j\overline{x}_\Lambda$. Помимо этого имеют место следующие соотношения:

$$x' x_\Lambda = \overline{x}, \qquad (3)$$
$$x x_\Lambda = \overline{x'}.$$

Анализируя схему разделителя импульсов с переходными контактами, приведенную в статье Монтгомери, автор выписывает выражение для цепей реле A: $E(A) = ca + ab' + b'c'c_\Lambda$ и, используя известное соотношение $xy + yz + zx' = xy + zx'$, а также соотношения (3) и (2), получает более простое выражение $E(A) = ca + j(b + c)$. Соответствующая схема в реферируемой статье не имеет переходных контактов и по общему числу контактов проще, чем схема Монтгомери.

М. А. Гаврилов

2904. Алгебраический метод синтеза многотактных релейных систем. Шестаков В. И., Докл. АН СССР, 1954, **99**, № 6, 987—990

Излагается векторно-алгебраический метод синтеза многотактных релейных систем, не требующий применения каких-либо таблиц или графиков и представляющий собой обобщение и распространение на неавтономные релейные системы метода, предложенного автором для синтеза автономных релейных систем (РЖМат, 1955, 2424). Отмечается применимость этого метода, в частности, для синтеза синхронных цифровых вычислительных машин в смысле Рида (РЖМат, 1954, 4614).

Пусть система построена из реле $Y_1, \ldots, Y_n$ и управляется независимыми параметрами $x_1, \ldots, x_m$. Если все реле системы имеют одинаковое запаздывание τ при срабатывании и отпускании и все параметры изменяются практически мгновенно и синхронно, то изменения состояния системы описываются векторным уравнением $\mathbf{y}(t + \tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$, где $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]$, $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_m]$. Релейная система называется совершенно неавтономной, или однотактной, если $\mathbf{y}(t + \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$, и многотактной в противном случае. Вычисление процесса $\mathbf{y}(t)$ по заданной функции $\mathbf{f}$ и заданному внешнему процессу $\mathbf{x}(t)$ называется анализом системы, а определение функции $\mathbf{f}$ по заданным процессам $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ — синтезом системы. Пусть $\mathbf{z} = [x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$. Тогда всякую пару последовательностей $\mathbf{x}(j)$ и $\mathbf{y}(j)$ можно заменить одной последовательностью $\mathbf{z}(j)$. Достаточно задать лишь 2^{m+n} первых членов последовательности $\mathbf{z}(j)$, ибо члены повторяются в ней не реже, чем через 2^{m+n} членов. Совокупность l последовательностей $\mathbf{z}(j)$ называется полной, если среди их членов встречаются все 2^{m+n} различных значений вектора $\mathbf{z}$. Для синтеза релейной системы пригодны лишь такие полные совокупности последовательностей $\mathbf{z}(j)$, в которых каждая пара последовательностей удовлетворяет условию: если $\mathbf{z}^{(r)}(j_1^{(r)}) = \mathbf{z}^{(s)}(j_2^{(s)})$, то $\mathbf{y}^{(r)}(j_1^{(r)}+1) = \mathbf{y}^{(s)}(j_2^{(s)}+1)$. Предлагается следующий алгоритм синтеза: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Sigma_{s=1}^{l} \mathbf{f}^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{f}^{(s)}(\mathbf{z}) = \Sigma_{j=0}^{2^{m+n}-1} \mathbf{y}^{(s)}(j+1)\, p_{\gamma(j)}^{(s)}(\mathbf{z})$, где Σ — знак булева сложения, а $p_\gamma(\mathbf{z})$ — конституенты единицы. Одна функция $\mathbf{f}^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ дает систему, в которой всякое отклонение внешнего процесса $\mathbf{x}(j)$ от заданного процесса $\mathbf{x}^{(s)}(j)$ вызывает $\mathbf{y}_0 = 0$. Изложенный метод синтеза позволяет синтезировать также многотактную релейную систему, реализующую всякую функцию $\varphi(j)$, значения которой представимы конечным числом значащих цифр и которая определяется равенствами $\varphi(0) = a$, $\varphi(j+1) = \chi(\psi(j), \varphi(j))$, где a, ψ, χ заданы.

Г. Н. Поваров

2905. Моделирование операций исчисления предложений посредством простейших четырехполюсных схем. Шестаков В. И., Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, № 1, 56—89

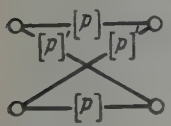
Статья состоит из двух разделов. В разделе I излагаются результаты работ автора по алгебре двухполюсных схем и моделированию операций исчисления предложений посредством двухполюсных схем (Шестаков В. И., Ж. техн. физики, 1941, **11**, № 6, 532—549; Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, **10**, № 6, 529—552). Раздел II посвящен моделированию операций исчисления предложений посредством четырехполюсных схем. Четырехполюсник есть электрическая цепь с двумя входными и двумя выходными полюсами, причем токи через полюсы каждой из этих пар равны и противоположны. Он характеризуется отношением K_E напряжения между выходными полюсами к напряжению между входными полюсами или отношением K_I выходного тока к входному. Рассматриваются два случая: 1) K_E, $K_I = 0$ или 1; 2) K_E, $K_I = \pm 1$.

К реф. 2905

Схема 1 Схема 2

В первом случае предложение p моделируется схемой 1 в смысле параметра K_E и схемой 2 в смысле параметра K_I, где $[p]$ — замыкающий, $[p]'$ — размыкающий контакты. Перестановка $[p]$ и $[p]'$ дает модель для $\sim p$. Рассматриваются следующие соединения четырехполюсников типа схемы 1 или 2: каскадное (выход одного со входом другого), параллельное (отождествление полюсов одного с полюсами другого) и последовательное (вторые полюсы входа и выхода одного с первыми полюсами входа и выхода другого). Каскадное соединение всегда

моделирует конъюнкцию $p \blacksquare q$. Параллельное соединение моделирует дизъюнкцию $p \vee q$ при четырехполюсниках типа схемы 1 и равносильно каскадному соединению при четырехполюсниках типа схемы 2. Последовательное соединение равносильно каскадному при четырехполюсниках типа схемы 1 и моделирует $p \vee q$ при четырехполюсниках типа схемы 2. Отсюда дается способ моделирования любой формулы исчисления предложений.



К реф. 2905
Схема 3

Во втором случае предложению p отвечает схема 3, называемая двухпозиционным коммутатором. Операция $\sim p$ моделируется перекрещиванием входных или выходных проводов коммутатора. Замена $[p]$ и $[p]'$ двухполюсниками, моделирующими формулы f и $\sim f$, дает коммутатор для формулы f. Приводятся коммутаторы для $p \vee q$, $p \blacksquare q$ и других операций. Каскадное соединение коммутаторов моделирует эквивалентность $p \equiv q$. Итак, любая операция исчисления предложений может быть моделирована посредством перекрещивания проводов и каскадного соединения коммутаторов для элементарных предложений и одной из трех операций: дизъюнкции, конъюнкции и импликации. Однако целесообразнее моделировать каждую из этих трех операций собственным коммутатором, чем выражать одну через другую и эквивалентность, ибо собственные коммутаторы для них требуют меньше контактов. Параллельное и последовательное соединения коммутаторов не являются коммутаторами и не моделируют операций исчисления предложений.

В заключение приводится пример построения трех вариантов схемы двоичного сумматора: схемы из коммутаторов на поляризованных реле с последовательными переносами, схемы из коммутаторов и двухполюсников на нейтральных реле с последовательными переносами и такой же схемы, но с одновременными переносами (Рутисхаузер Г., Шпайзер А., Штифель Э., Вопр. ракетной техники, 1952, № 5).

Примечание референта. В ссылке 3 списка литературы ошибочно указан № 10 вместо т. 10, № 6. *Г. Н. Поваров*

2906. О некоторых не обязательно линейных $(n+1)$-полюсниках. Штёр (Über gewisse nicht notwendig lineare $(n+1)$-Pole. Stöhr Alfred), Arch. elektr. Übertrag., 1953, **7**, № 11, 546—548 (нем.)

Рассматриваются схемы, построенные из элементов, у которых разность потенциалов u и ток i связаны уравнением $f(u, i) = 0$, разрешимым как относительно u, так и относительно i. Кроме линейных, к таким элементам принадлежат гальванические элементы, диоды, сухие выпрямители и другие нелинейные элементы (Hollmann H. E., Arch. elektr. Übertrag., 1952, **6**, 434—440, 478—486, 520—531). Рассматриваются также схемы, представляющие собой кусок непрерывно протяженной проводящей материи в евклидовом пространстве (x_1, x_2, x_3) с полюсами в виде лишенных сопротивления электродов на поверхности куска (аналогичное рассмотрение возможно для одномерных и двумерных проводников). Внутри куска потенциал $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ и плотность тока $\mathbf{i}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$, где $\mathbf{i}_k$ — составляющая вектора $\mathbf{i}$ по оси x_k, связаны уравнениями

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0, \quad di_k = -\sum_{l=1}^{3} \gamma_{kl} d \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Здесь γ_{kl} зависит от x_1, x_2, x_3 и $\mathbf{i}$, но не от $d\mathbf{i}$ и $d \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}$. Используется линейная зависимость между du и di в схемах этих двух видов, чтобы обобщить на такие схемы некоторые свойства схем, построенных из линейных двухполюсников.

Пусть схема обладает $n+1$ полюсами $K_0, K_1, \ldots, K_n$, и пусть φ_l — потенциал на K_l, а i_l — ток через K_l внутри схемы. По определению, $r_{kl} = \frac{\partial(\varphi_k - \varphi_0)}{\partial i_l}$. Тогда $i_0 + i_1 + \ldots + i_n = di_0 + di_1 + \ldots + di_n = 0$, $d(\varphi_k - \varphi_0) = \sum_{l=1}^{n} r_{kl}\, di_l$ $(k = 1, \ldots, n)$. Если при этом $r_{lk} = r_{kl}$ $(k, l = 1, \ldots, n)$, то говорят, что $(n+1)$-полюсник обладает свойством симметрии. Доказывается, что все $(n+1)$-полюсники, построенные из двухполюсников с зависимостью $f(u, i) = 0$, обладают свойством симметрии; $(n+1)$-полюсник с непрерывным распределением тока обладает свойством симметрии, если $\gamma_{kl} = \gamma_{lk}$. Дается понятие аддитивной величины, заданной на $(n+1)$-полюсниках, и вводятся две аддитивные (в этом смысле) дифференциальные формы: $\Omega = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu di_\nu$ и $\hat{\Omega} = \sum_{\nu=0}^{n} i_\nu d\varphi_\nu$. Доказана равносильность следующих предложений: а) $(n+1)$-полюсник обладает свойством симметрии; б) Ω есть полный дифференциал; в) $\hat{\Omega}$ есть полный дифференциал. $\Omega = \hat{\Omega}$ влечет а) и, кроме того, равенства $\varphi_k - \varphi_0 = \sum_{l=1}^{n} r_{kl}\, i_l$ $(k = 1, \ldots, n)$. Если $2 \cdot 2n$-полюсник с n парами входов и n парами выходов обладает свойством симметрии, то входные напряжения и токи связаны с выходными каноническим преобразованием. Последнее предложение обобщает аналогичный результат Коидзуми для линейных $2 \cdot 2n$-полюсников (Koizumi S., Arch. Elektrotechnik, 1939, **33**, 171—188).

Г. Н. Поваров

2907. Две теоремы об изменении точки отсчёта напряжений в электрической цепи. Шекел (Two network theorems concerning change of voltage reference terminal. Shekel Jacob), Proc. I. R. E., 1954, **42**, № 7, 1125 (англ.)

Доказываются две теоремы, из которых первая описывает изменения в матрице проводимости цепи, вызываемые изменением точки, относительно которой измеряются напряжения (точки «заземления»), а вторая утверждает инвариантность определителя матрицы проводимости относительно этого преобразования. *Н. К. Круг*

2908. О детерминантах электрических цепей. Цзан (On electrical network determinants. Tsang N. F.), J. Math. and Phys., 1954, **33**, № 2, 185—193 (англ.)

Дается сводка уже известных положений об определителях электрических цепей. Рассматриваются определители, полученные при решении схем методом контурных токов и методом узловых потенциалов. Кроме того, автор доказывает четыре новые теоремы, посвященные изучению отношения определителя, полученного из уравнений контурных токов, к определителю, полученному

из уравнений узловых потенциалов. Показывается, что в различных схемах это отношение равно произведению сопротивлений всех ветвей. *Н. К. Круг*

2909. Замена бруновского цикла (метода синтеза электрических цепей) с идеальным трансформатором циклом без идеального трансформатора. Реза (Conversion of a Brune cycle with an ideal transformer into a cycle without an ideal transformer. Reza F. M.), J. Math. and Phys., 1954, **33**, № 2, 194—198 (англ.)

Дается метод синтеза двухполюсника по заданному отношению двух полиномов от p. В отличие от метода Бруна (O. Brune) в полученных схемах отсутствует идеальный трансформатор, но в схемы вводится одна отрицательная индуктивность. Впервые синтез цепей без идеального трансформатора дан в статьях Ботта и Даффина (Bott R., Duffin R. J., J. Appl. Phys., 1949, **20**, 816) и Гильмена (Guillemin E. A., J. Math. and Phys., 1949, **28**, № 1, 22—42). Изложенный в статье метод может рассматриваться как развитие метода Бруна. *Н. К. Круг*

2910. Передаточная функция цепей без взаимной индуктивности. Фиалков, Герст (The transfer function of networks without mutual reactance. Fialkow Aaron, Gerst Irving), Quart. Appl. Math., 1954, **12**, № 2, 117—131 (англ.)

Дается теория синтеза электрических цепей, содержащих сопротивления, емкости и индуктивности (без взаимных индуктивностей и идеальных трансформаторов). По заданной передаточной функции, т. е. по заданному отношению напряжений выхода к напряжению входа в операторной форме

$$\frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k p^k},$$

находятся параметры схемы трехполюсника. Дается теоретическое доказательство возможности построения схем трехполюсников. Искомые схемы состоят из параллельного включения T-образных четырехполюсников. Приведены два примера построения искомых схем и найдены параметры схем для полиномов третьего порядка ($m = n = 3$).

Хотя некоторые теоретические положения известны, работа является оригинальной. *Н. К. Круг*

2911. Ограниченные функции, частотные характеристики электрических цепей и алгебраические критерии устойчивости. Эффертц (Beschränkte Funktionen, Frequenzcharakteristiken elektrischer Netzwerke und algebraische Stabilitätskriterien. Effertz H. F.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8—9, 281—283 (нем.)

Статья обзорного характера. Выясняются связи между теорией электрических цепей Кауера (W. Cauer), работами Каратеодори и Шура по ограниченным аналитическим функциям и проблемой Рауса — Гурвица. *Ф. Р. Гантмахер*

2912. Исследование воздействия периодических колебаний на электроцепи. Сил (Analysis of network response to periodic waves. Seal Philip M.), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 1, 13—24 (англ.)

Излагается метод (Waidelich D. L., Proc. I. R. E., 1946, **34**, 78P—83P) нахождения установившегося напряжения на выходе четырехполюсника $e_{\text{вых}}$ по входному напряжении $e_{\text{вх}}$ в виде периодического прямоугольного колебания (симметричного и несимметричного) периода T по известной передаточной функции $e_{\text{вых}} / e_{\text{вх}} = N(p)$. Установившееся напряжение находится по формуле

$$e_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_W \frac{e^{pt} E_{\text{вх}}(p)\, N(p)}{1 - e^{pT}}\, dp,$$

где $E_{\text{вх}}(p)$ — подвергнутое лапласовскому преобразованию входное напряжение.

Изложенная в статье методика интегрирования дает возможность находить временную функцию, т. е. $e_{\text{вых}}(t)$, для разнообразных схем четырехполюсников. Приложение содержит таблицы для нахождения временных функций $f(t) = S^{-1}[F(p)]$ по заданным операторным функциям $F(p) = E_{\text{вх}}(p) N(p)$. *Н. К. Круг*

2913. Поправка. Поваров Г. Н., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 6
К РЖМат, 1955, 458.

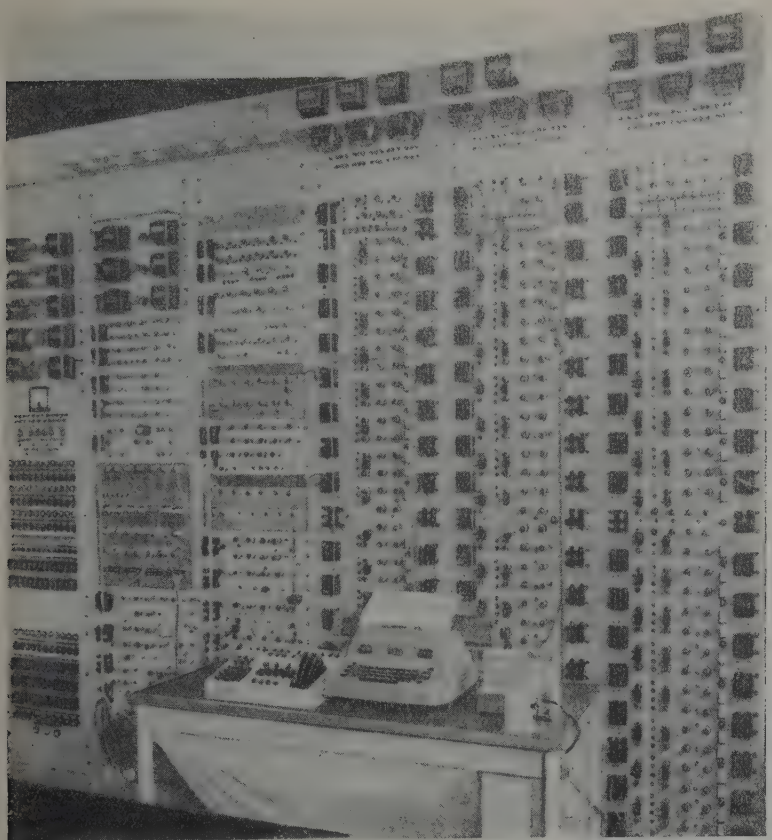
См. также: 2596, 2597

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

2914. Электронная вычислительная машина ПТЕРА. I. История создания и возможности машины. Костен (PTERA I. Wordingsgeschiedenis van PTERA; doel en mogelijkheden. Kosten L.), PTT-bedrijf, 1953, 5, № 14, 116—123 (голл.; резюме франц., англ.)

Статья является первой из четырех, посвященных описанию голландской цифровой машины ПТЕРА (PTERA — electronische reken automaat PTT; электронный вычислительный автомат PTT, буквы PTT обозначают «Staatsbedrijf der posteijen, telegrafie en telefonie» — голландское государственное управление почт, телеграфа и телефона).

Строительство ПТЕРА было начато в 1949 г. и завершено в конце 1953 г. По своей конструкции — это одноадресная электронно-релейная машина. Ввод с перфоленты с фотоэлектрическим считыванием (20 знаков в 1 сек.), оперативное хранение двоичных кодов — на магнитном барабане емкостью в 1024 числа по 31 разряду каждое. Выполняются операции сложения, вычитания, умножения и деления. Устройство управления обеспечивает автоматическое выполнение операций в порядке, предусмотренном программой, а также условное изменение этого порядка. Автоматическая печать результатов производится со скоростью 10 знаков в 1 сек.



К реф. 2914

Скорость — 20 элементарных операций в 1 сек.; количество ламп 700, реле 120, потребляемая мощность 6 *квт*. Приведены фотографии общего вида машины (см. фото), пульта управления, магнитного барабана и одной из головок. *Е. И. Мамонов*

2915. Электронная вычислительная машина ПТЕРА. II. Работа машины. П у л (PTERA II. De werking van PTERA. P o e l W. L. v a n d e r), PTT-bedrijf, 1953, 5, № 4, 124—134 (голл.; резюме франц., англ.)

Дано описание запоминающего устройства, арифметического устройства, устройства управления, а также общее описание принципов работы отдельных элементов машины ПТЕРА (см. реф. 2914). Запись кодов на барабане последовательная, причем разряды на дорожке записываются смешанно (сначала первый разряд одного числа, затем первый другого и т. д., после этого — второй разряд одного числа, затем второй другого и т. д.) На дорожке помещено 32 кода числа, при этом около 30% остальной части дорожки не используется. Запись 1 и 0 производится разнополярными импульсами, вызывающими намагничивание покрытия барабана в противоположных направлениях. Импульсы записи попадают на вход усилителя считывания и для восстановления тракта считывания после записи требуется около 200 *мксек.*, что допустимо при малой скорости выполнения операций на этой машине. Синхронизирующие импульсы (992 шт.) создаются за 17 *мсек.* при помощи зубчатого железного диска, сидящего на одном валу с барабаном. Время одного оборота 25 *мсек.*, период следования разрядов одного числа 550 *мксек.* (частота около 2 *кгц*).

Арифметическое устройство состоит из 3 регистров на 31 разряд каждый. Два регистра электронные, накопительного типа и служат для производства арифметических операций, а один релейный регистр предназначается для хранения множимого. Сложение производится по последовательному принципу, а умножение и деление — по параллельному.

В статье ошибочно указаны величины времени на стр. 127 и 132 (микросекунды вместо миллисекунд.) *Е. И. Мамонов*

2916. Электронная вычислительная машина ПТЕРА. III. Составление программ. П у л (PTERA III. Het programmeren voor PTERA. P o e l W. L. v a n d e r), PTT-bedrijf, 1953,5,№ 4, 135—147 (голл.; резюме англ., франц.)

Подробно излагаются принципы и методика составления программ для вычислительной машины ПТЕРА. Дается полный перечень команд и описывается техника организации ввода программ. Стандартные подпрограммы, составляющие библиотеку машины ПТЕРА, составлены в относительных адресах. Существует так называемая программа адресной книги, которая при вводе программы с перфоленты осуществляет все необходимые преобразования адресов и отсылок стандартных подпрограмм, связывая их с главной ведущей программой. Ведущая программа является, таким образом, костяком: она вызывает в действие подпрограммы в последовательности, определяемой логикой решения данной задачи. Описываемые методы и технические приемы программирования применялись ранее. *Л. Н. Королев*

2917. Электронная вычислительная машина ПТЕРА. IV. Программа А7 для составления таблицы функций. К о с т е н (PTERA IV. «A7». K o s t e n L.), PTT-bedrijf, 1953, 5, № 4, 148—163 (голл.; резюме англ., франц.)

Приводится программа для табулирования вероятностной функции Эрланга

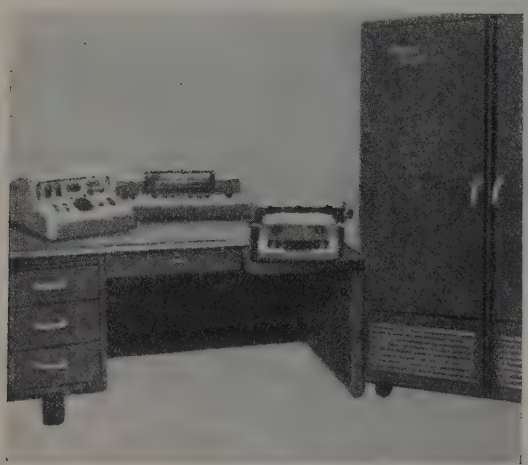
$$E_{2,c}(a) = \frac{\frac{a^{c-1}}{(c-1)!} \cdot \frac{a}{c-a}}{\sum_{i=0}^{c-1} \frac{a^i}{i!} + \frac{a^{c-1}}{(c-1)!} \cdot \frac{a}{c-a}},$$

условно названная А7. Дается подробный анализ этой формулы с точки зрения возможностей машины ИТЕРА и подробное описание программы.

Л. Н. Королев

2918. Вычислительная машина (Computer), Tele-Tech, 1954, **13**, № 5, 95 (англ.)

Сообщение фирмы «Бендикс» (Bendix Computer Divison) о выпуске цифровой машины для решения дифференциальных уравнений с 60 интеграторами. Нормальная скорость выполнения операций — 100 повторений по независимому переменному в 1 сек.; если используются 30 интеграторов или меньше, скорость может быть повышена до 200 повторений в 1 сек. Приведен общий вид (см. фото).



К реф. 2918

2919. Вычислительная машина, построенная целиком на полупроводниковых триодах. Макдоналд (All-transistor computer. Macdonald Neil), Computers and Automat., 1954, **3**, № 9, 28—29 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 1985. Приведена фотография общего вида машины (см. фото). Слева — быстродействующий перфоратор, справа — вычислительное устройство со снятым кожухом; справа видны платы с печатными схемами такого типа, как на фотографии к реферату 1985.

2920. Вычислительная машина спроектирована для образовательных целей и для промышленности. Бэрд (Brain is project for education, industry. Baird Dwight G.), Amer. Business, 1954, **24**, № 4, 21, 42—44 (англ.)

Сообщение об универсальной цифровой электронной вычислительной машине Уэйнского универси-

К реф. 2919

тета (РЖМат, 1955, 2434). Машина состоит из стандартных блоков 13 типов. Благодаря блочной конструкции логическая схема машины может быть изменена в соответствии с характером ее применения. Все блоки машины смонтированы на вертикальных металлических рамах, расположенных в виде буквы «П», в центре которой помещается пульт управления. Отдельные блоки соединены между собой разноцветными коаксиальными кабелями. Соединение блоков может быть изменено с целью изменения логической схемы машины. Приведен общий вид машины (см. фото). Машина может быть использована для целей автоматического управления производственными процессами и автоматического регулирования; машина преобразует входные данные, производит вычисления и вырабатывает сигналы управления.

Б. М. Полыковская

К реф. 2920

2921. **Суммирование трехмерных рядов Фурье на быстродействующей цифровой вычислительной машине. Мейер, Трублад** (Three-dimensional Fourier summations on a high-speed digital computer. Mayer S. W., Trueblood K. N.), Acta cristallogr., 1953, **6**, № 5, 427 (англ.)

Сообщается о применении вычислительной машины СВАК (SWAC) для суммирования трехмерных рядов Фурье при исследовании структуры сульфамида и хлоргидрата циклопропиламина. Суммирование трехмерных рядов Фурье, производившееся по 1/16 части ячейки сульфамида, включающее все 180 рефлексов этого кристалла (пространственная группа *Fdd2*), требовало менее 35 мин. машинного времени. Данные пробивались на перфокартах, причем для ускорения работы заготовлялось несколько массивов этих карт. Вычисленные результаты также пробивались на перфокартах со скоростью 50 карт в 1 мин. Каждая карта содержит 15 значений электронных плотностей. Авторы утверждают, что их программа легко распространяется на любую пространственную группу, для которой члены суммирования могут быть представлены в виде

$$\pm \Sigma_0^k \Sigma_0^h \Sigma_0^l \left| F_{hkl} \right| \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\pi(lz-\alpha) \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\pi hx \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\pi ky.$$

Л. Н. Королев

2922. **Новая вычислительная машина Авиационного бюро Военно-морского ведомства** (New buair computer), Prod. Engng, 1953, **24**, № 11, 300, 302 (англ.)

Сообщение фирмы «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (Computer Research Corp.) об установке электронной вычислительной машины в Авиационном бюро (Buair) Военно-морского ведомства США. Универсальная цифровая машина оперирует с двоично кодированными десятичными числами, имеет запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 11 000 десятичных чисел. Умножение и деление выполняются в течение 15 мсек., сложение и вычитание требуют меньшего времени. Ввод данных осуществляется с трех магнитных лент; вывод данных осуществляется с помощью устройства, печатающего 600 строк по 120 знаков в 1 мин. См. также РЖМат, 1954, 4621. *Л. С. Легезо*

2923. **Новая лаборатория для моделирования снарядов, управляемых по трем координатам. Бауэр** (New laboratory for three-dimensional guided missile simulation. Bauer Louis), Proc. Western Computer Conf. (Febr. 1953), New York, 1953, 187-195 (англ.)

Сообщается об организации в 1952 г. фирмой «Ривс Инструмент» (Reeves Instrument Corp.) новой лаборатории для моделирования управляемых снарядов, входящей в состав группы «Проект Циклон» (Project Cyclone) и находящейся в ведении Авиационного бюро Военно-морского ведомства США. Лаборатория используется также и для работы в других областях техники.

Первоначально моделирующее устройство лаборатории состояло из двух универсальных моделирующих устройств (в состав каждого из которых входила моделирующая установка РЕАК (REAC) фирмы «Ривс Инструмент» и моделирующее устройство на переменном токе) и баллистической моделирующей установки, предназначенной для решения уравнений, общих для всех управляемых снарядов. Баллистическое вычислительное устройство оказалось неудобным, так как использовало блоки, работающие на переменном токе, и вскоре оно было заменено несколькими усовершенствованными установками РЕАК. В настоящее время установка лаборатории моделирования состоит только из установок РЕАК и нескольких вспомогательных блоков. Различные группы блоков решают задачу движения ракеты, положения рулей и т. п. Для решения задачи используются в соответствии с математической целесообразностью 4 координатные системы, связанные с землей, ракетой, земной или воздушной скоростью ракеты.

Устройство новой лаборатории моделирования состоит из 13 установок РЕАК, 14 вспомогательных блоков и 3 специальных стоек с дополнительными усилителями, ограничителями, реле и т. п.

Каждая из установок РЕАК содержит 7 интегрирующих усилителей, 7 суммирующих усилителей, 6 инверторов и 23 масштабных потенциометра. Решающие усилители по своей конструкции в основном одинаковы и отличаются только обратной связью и входными элементами. Каждая из установок РЕАК может решать обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 7-го порядка. Имеется диодное устройство для получения некоторых нелинейных зависимостей. Другие виды нелинейности уравнения и переменные коэффициенты могут быть введены с помощью вспомогательных сервоблоков.

Дается подробное описание аппаратуры, принципов ее действия и контроля. Приводятся блок-схема, план и фотография общего вида лаборатории.

В. П. Парамонов

2924. **Множительное устройство непрерывного действия с разделением сигнала во времени. Фриман, Парсонс** (A time-sharing analog multiplier. Freeman H., Parsons E.), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 1, 11—17 (англ.)

Описывается множительное устройство непрерывного действия, принцип работы которого следующий. Если два напряжения E_a и E_c прикладываются к двум линейным цепям, напряжение на выходных клеммах этих цепей будет $E_a f(t)$ и $E_c f(t)$. Если $E_c f(t)$ сравнивается с третьим напряжением E_b, то в момент, когда $E_c f(t) = E_b$, $E_a f(t) = E_a \cdot E_b / E_c$, причем величина этого произведения совершенно не зависит от вида функции $f(t)$ (это может быть экспонента, синусоида и т. д.).

Управление последовательностью процессов осуществляется блоком синхронизатора. Точность работы устройства зависит в основном от точного введения «разверток» $f(t)$, идентичности двух цепей разверток, точности сравнения и скорости операции «чтения» выходной цепи. При повышении частоты временная ошибка компаратора и выходной цепи становится заметной частью рабочего цикла.

Описанная модель множительного устройства была выполнена на 400 операций умножения (деления) в 1 сек. и дала погрешность меньше чем 0,2% на полной шкале. Авторы утверждают, что отсутствие временных запаздываний в данном методе умножения позволит довести число операций умножения (деления) до 5000 в 1 сек. без ухудшения точности работы.

Описанная конструкция быстродействующего множительного устройства позволяет вести работу с разделением сигнала во времени, т. е., используя скоростные механические или электронные переключатели, можно с помощью одного множительного устройства решать одновременно несколько задач. Приводятся принципиальные схемы блоков устройства. *П. В. Тихонов*

2925. **Простое электронное множительное устройство. Норсуэрти** (A simple electronic multiplier. Norsworthy K. H.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 312, 72—75 (англ.)

Дано описание множительного устройства, использующего зависимость $K(X+Y)^2 - K(X-Y)^2 = 4KXY$. Приведены блок-схема и принципиальная схема такого устройства. В схему входят суммирующие и квадрирующие цепи, катодные повторители и генератор пилообразных колебаний. Точность результатов составляет не более 1%. Ценность этого устройства, по мнению автора, заключается в его простоте. Множительное устройство может работать с частотой на входе до 50 *гц*. *Н. Ф. Семикова*

2926. **Множительная электронная трубка для электрических моделей** (Analogue multiplier tube), Technol. Rev., 1953, 55, № 6, 307—308 (англ.)

Описывается принцип построения множительного устройства на основе электронной трубки, которое, являясь довольно простым по конструкции, дает погрешность произведения не более 2% от максимума при большой скорости срабатывания (напряжение, соответствующее произведению, достигает 98% от установившегося значения за 10 *мксек*.). Принцип действия устройства заключается в том, что электронный пучок проектируется на экран в виде круглого пятна диаметром около 25 *мм*. Плотность тока по площади пятна должна быть постоянной. Экран, на который попадает пятно, состоит из четырех проводящих квадрантов. Центр квадрантов совпадает с центром пятна при отсутствии отклоняющих напряжений. Токи от первого и третьего квадрантов пропорциональны площади пятна, приходящейся на эти квадранты. Этим токам приписывается знак «+». Токам, приходящим от второго и четвертого квадрантов, приписывается знак «—». Токи от всех четырех квадрантов суммируются с учетом знаков с помощью усилителя. Когда пятно находится в центральном положении, то суммарный ток (с учетом знаков) равен нулю. При смещении центра пятна в какую-либо сторону суммарный ток изменяется пропорционально произведению составляющих отклонений по осям. Это происходит потому, что разность площадей пятна, покрывающих «положительные» и «отрицательные» квадранты, всегда равна $2X \cdot Y$, где X и Y — координаты центра пятна относительно центра квадрантов. Умножение будет выполняться правильно, если пятно покрывает каждый из четырех квадрантов хотя бы небольшой частью своей площади. Предельно допустимым смещением пятна является смещение центра его на величину радиуса относительно центра квадрантов. Смещение пятна пропорционально приложенным напряжениям (или токам) осуществляется с помощью обычных методов электростатического или электромагнитного отклонения. *Н. В. Корольков*

2927. **Множительное устройство для вычислительных машин. Мерон, Отто** (Instantaneous multiplier for computers. Mehron Martin, Otto Walter), Electronics, 1954, **27**, № 2, 144—148 (англ.)

Умножение двух функций времени $f_1(t)$ и $f_2(t)$ происходит способом двойной балансной модуляции. После демодуляции с помощью фазочувствительного детектора на выходе устройства получается напряжение, равное $kf_1(t) \cdot f_2(t)$ с учетом знака произведения. Несущая частота балансных модуляторов 456 *кгц*. Частотные компоненты функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ могут лежать в диапазоне от 0 до 5000 *гц*. Динамический диапазон выходного напряжения 50:1. Максимальная ошибка при максимальных пиковых значениях входных напряжений (любой полярности) в 2 *в* не превышает 10%. Устройство содержит 8 ламп (типа 6SN7, 6H6 и 6AG7). Приведена фотография устройства и подробно описана принципиальная схема. Приведена скелетная схема установки для вычисления автокорреляционной функции с помощью описываемого устройства. *Л. В. Кутуков*

2928. **Операционный усилитель K2-W** (Operational amplifier, K2-W), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 12, XXXI (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Филбрик» (George A. Philbrick Researches, Inc.) о выпуске операционного усилителя K2-W, смонтированного во вставном блоке с октальным цоколем. Утверждается, что усилитель может выполнять следующие операции: сложение, вычитание, интегрирование, дифференцирование, умножение, деление, инвертирование, преобразование импеданца. Некоторые параметры усилителя: усиление по постоянному току 15000 (при разомкнутой петле обратной связи); время нарастания импульсов 2 *мксек*.; выходное напряжение до 100 *в*; выходной импеданц 1 *ом* (при максимальной обратной связи); дрейф нуля 0,01% за день. *Л. К.*

2929. **Магнитная воспроизводящая головка с электроннолучевой трубкой специальной конструкции. Скеллетт, Лавридж, Грейшиан** (Electron beam reproducing head for magnetic tape recording. Skellett A. Melvin, Loveridge Lawrence E., Gratian J. Warren), Trans. I. R. E., 1954, **AU-2**, № 1, 23—27 (англ.)

Новый тип магнитной головки имеет сердечник, состоящий из двух полуколец, набранных из пластин мю-металла толщиной 0,35 *мм*, которые охватывают электроннолучевую трубку специальной конструкции. Рабочий зазор головки шириной 0,0075 *мм*. Внутри трубки расположены полюсные наконечники, в зазоре между которыми проходит электронный луч. Магнитный поток ленты, замыкаясь по сердечнику и полюсным наконечникам, отклоняет электронный луч вправо или влево в зависимости от направления потока ленты. Отклоненный луч попадает соответственно на правый или левый коллекторы, на которые подано напряжение +400 *в* через сопротивления по 100 *ком*. Таким образом между коллекторами образуется разность потенциалов, являющаяся выходным сигналом головки. Если магнитный поток равен нулю, то луч попадает на средний коллектор, который заземлен. Головка такого типа реагирует на величину магнитного потока, а не на скорость его изменения, в результате чего

величина выходного сигнала не зависит от частоты записанного сигнала и скорости движения ленты до тех пор, пока не начинают сказываться конечные размеры зазора. Зависимость выходного сигнала от индукции в зазоре между полюсами сердечника линейна в диапазоне ± 1 *гс*. Рабочая величина индукции равна 0,04 *гс*, а выходное напряжение при этом равно 0,6 *в* амплитудного значения. Недостатком этой головки является то, что в области высоких частот завал частотной характеристики у нее наступает раньше, чем у обычной кольцевой головки. В статье приведены для сравнения частотные характеристики обычной кольцевой головки и головки нового типа, а также фото составных частей сердечника головки. *В. В. Карибский*

2930. Исследование различных форм сердечников для воспроизводящей головки на электронно-лучевой трубке в магнитной записи. Грейшиан (Investigation of core structures for the electron-beam reproducing head in magnetic recording. Gratian J. Warren), Trans. I.R.E., 1954, AU-2, № 1, 27—38 (англ.)

В головке описываемого типа (см. реф. 2929) сердечник, подводящий магнитный поток от ленты к отклоняющим пластинам трубки, в значительной степени определяет параметры головки. Эксперименты проводились с сердечниками для записи продольного и поперечного типов. Указывается, что сердечник для записи поперечного типа, хотя и имеет преимущества при воспроизведении импульсных сигналов большой длины, распространения не получил главным образом из-за сложности записывающего оборудования и большой величины переднего зазора, ограничиваемой толщиной ленты. Из опробованных типов сердечников наиболее удачным оказался сердечник, имеющий «крылышки», вытянутые в направлении движения ленты. «Крылышки» защищают сердечник от непосредственного влияния на него магнитных полей ленты. Действие «крылышек» проявляется в расширении частотной характеристики сердечника в сторону низких частот и зависит от их размеров и радиуса изгиба. Приводятся экспериментальные кривые, иллюстрирующие действие «крылышек». Окончательно выбранный сердечник имеет «крылышки» длиной около 100 *мм* и шириной 25 *мм*, согнутые с радиусом 75 *мм*. Сердечник набирается из пластин мю-металла толщиной 0,35 *мм*. Частотная характеристика головки с этим сердечником, заключенной в экран, имела неравномерность ± 3 *дб* в диапазоне 1,2 *гц*—1,6 *кгц*. Нижний предел может быть уменьшен до 0,9 *гц*, если экран не используется. Завал характеристики на высоких частотах, обусловленный потерями в сердечнике на токи Фуко, а также потерями в магнитном слое, переднем и лучевом зазорах, может быть уменьшен применением *RC* цепей коррекции. Вычислено, что при одной *RC* корректирующей цепочке верхний предел частотной характеристики может быть сдвинут до 10 *кгц*, а при двух цепочках *RC* — до 15 *кгц*. Соотношение сигнал — шум при полосе 1,2 *гц* — 10 *кгц* достигает 40 *дб*. Приводится расчет магнитной цепи сердечника и высокочастотных потерь. *А. И. Щуров*

2931. Магнитная запись. Камрас (Magnetic recording. Camras Marvin), Proc. I. R. E. Australia, 1954, 15, № 3, 61—69 (англ.)

Обзор вопросов, связанных с магнитной записью. Сравниваются различные виды записи (механическая запись, кинопленка и магнитная запись). Приводятся гистерезисные петли различных материалов, применяемых для магнитных покрытий, дается сравнительная характеристика этих материалов. Указывается, что материал с большей коэрцитивной силой дает лучшую частотную характеристику в области высоких частот. Рассматриваются различные виды магнитной записи и приводятся конструкции различных магнитных головок. Описывается принцип построения поля головки, которое сильно сконцентрировано у одного края щели головки и быстро спадает у противоположного края щели. Такое поле, получающееся в результате наложения двух полей, дает более равномерное намагничение по глубине ленты. Рассматриваются различные виды магнитного смещения при записи звука и объясняется его роль. Наименьшие искажения и наименьшие шумы получаются при высокочастотном смещении. Подробно описываются факторы, влияющие на частотную характеристику тракта запись — воспроизведение. Одной из наиболее важных проблем является проблема борьбы с шумами ленты. Эта проблема будет разрешена созданием ленты и головки с повышенной отдачей. Намечаются пути дальнейшего развития магнитной записи, из которых наиболее интересными являются два: создание высокочастотных ферритовых головок и головок, реагирующих на величину магнитного потока ленты, а не на его изменение (см. реф. 2929). В статье приведено большое количество иллюстраций. *В. В. Карибский*

2932. Некоторые вопросы, связанные с воспроизведением сигнала с магнитной ленты. Аксон (Some problems of magnetic tape reproduction. Axon P. E.), Sound Record. and Reprod., 1954, 4, № 5, 118—127 (англ.)

Рассматриваются три вопроса: получение калиброванного тракта воспроизведения для измерения с его помощью характеристики записи (зависимости индукции ленты, нормальной к ее поверхности, от частоты); неточность калибровки при использовании кольцевой магнитной головки; образование паразитной записи при хранении ленты в рулонах.

Доказывается, что калибровка получается более точной при употреблении в качестве воспроизводящей головки витка медной проволоки. Рассматриваются ошибки калибровки, вносимые зазором между барабаном и головкой, непараллельностью щелей воспроизводящей и записывающей головок и дефектами щели.

Изучение вопросов, связанных с хранением ленты, показало, что при хранении ленты в рулонах один слой может создавать отпечаток на другом, особенно если характеристика намагничения крутая в области слабых полей. Интенсивность этих отпечатков с расстоянием убывает по экспоненте. Интенсивность отпечатка для данной длины волны получается максимальной при $\lambda = 2\pi d$, где d — расстояние, причем с уменьшением длины волны эти максимумы убывают. Интенсивность отпечатков увеличивается с течением времени хранения, а также с увеличением температуры и натяжения. Паразитные отпечатки можно сильно ослабить, практически не ослабляя полезных, если произвести стирание значительно более слабым полем, чем нормальное. Приведены

осциллограммы и графики, подтверждающие вышеизложенные положения. *В. В. Карибский*

2933. Эффект размагничивания при записи на магнитную пленку. Логи (Demagnetizing effect in magnetic tape recording. Logie H. J.), S. Afric. J. Sci., 1953, **50**, № 1, 15—18 (англ.)

Дается расчет эффекта саморазмагничивания при синосуидальном сигнале записи, записанном на стальной ленте. Рассматривается влияние ширины, толщины и скорости записи на полосу частот, пропускаемых лентой. Коэффициент размагничивания подсчитан для широкого диапазона частот. Рассматривается влияние гистерезисных свойств материала на выходной сигнал.

См. также Трахтенберг Ф. М., «Влияние процесса саморазмагничивания на величину остаточной индукции в ферромагнитном звуконосителе, синусоидально намагниченном по длине», Тр. Комис. по акустике АН СССР, 1950, № 5. *Я. А. Хетагуров*

2934. Измерение шумов покрытий, применяемых для магнитной записи. Кертис (Noise test for magnetic recording media. Curtis Roger C.), Electronics, 1953, **26**, № 7, 216, 218, 220, 222 (англ.)

Описывается простой метод непосредственной оценки шумов магнитной записывающей среды, разработанный фирмой «Диктафон Корпорейшн» (Dictaphon Corp.). Метод состоит в том, что шумы среды, запись с которой полностью стерта, воспроизводятся магнитной головкой и подаются с нее на усилитель. Выход усилителя подключается к ламповому вольтметру для измерения уровня шумов или к анализатору гармоник для определения спектра шумов. Дано краткое описание источников шумов при магнитной записи, и приводятся результаты испытаний ленты из пластмассы и ленты из бумаги, на которые было нанесено покрытие одного и того же типа. *В. В. Карибский*

2935. Постоянная маркерная дорожка для магнитного запоминающего устройства на барабане (Permanent time track for magnetic memory drum), Electronics, 1954, **27**, № 1, 260 (англ.)

Сообщение фирмы «Либраскоп» (Librascope Inc.) о маркерной дорожке в виде постоянных магнитов из магнитного порошка, заполняющего прорези, нанесенные по окружности барабана. Подобная дорожка не может быть случайно стерта, что является ее преимуществом перед дорожкой, записанной на покрытии барабана. *А. И. Щуров*

2936. Запоминающие устройства на магнитных барабанах (Magnetic storage drums), Instruments, 1953, **26**, № 9, 1323 (англ.)

Сообщение фирмы W. S. MacDonald Co. Inc. о выпуске магнитных с горизонтальной осью барабанов пяти типов.

Приведены геометрические размеры и числа оборотов барабанов и данные входных и выходных сигналов.

Тип	Диаметр *мм*	Длина *мм*	Номинальная скорость об/мин
1	102	152	1750
2	204	940	600
3	127	380	1150
4	152	865	1150
5	204	38	1150

Типы 1—4 выполняются с перемещающимися головками. Для изменения положения головки используется сервоуправление. Барабан изготовлен так, что бой от эксцентриситета и диаметра допускает расположение магнитных головок на расстоянии 25 μ от поверхности барабана, с изменением амплитуды сигнала 1,5 *дб* по напряжению. Для покрытия барабана использована красная окись железа. Считываемый сигнал равен 20 *мв* при сигнале записи 50 *в*. *Я. А. Хетагуров*

2937. Конструирование магнитного барабана. О'Коннор (Magnetic drum design. O'Connor D. G.), Electronics, 1953, **26**, № 11, 196 (англ.)

Дается номограмма для определения основных параметров магнитного запоминающего устройства на барабане. Номограмма связывает между собой диаметр барабана, скорость вращения, плотность и частоту записи и объем запоминающего устройства. Приводятся примеры расчета запоминающего устройства с помощью номограммы. *А. И. Щуров*

2938. Для Вашей вычислительной машины (For your digital computer), Computers and Automat, 1953, **2**, № 6, 27 (англ.)

Рекламное сообщение канадской фирмы «Компьютинг Дивайсиз» (Computing Devices) о недорогом барабане для магнитного запоминающего устройства. Приводятся основные технические характеристики: емкость 512 или 1024 32-разрядных двоичных числа, диаметр 120 *мм*, длина образующей 30 *мм*, вес 4,4 *кг*, покрытие обладает большой коэрцитивной силой, скорость до 6000 об/мин, конструкция горизонтальная или вертикальная. Приводится фото внешнего вида барабана. *А. Б. Залкинд*

2939. Миниатюрные угольнопленочные прецизионные потенциометры (Miniature, carbon-film, precision potentiometer), Prod. Engng, 1953, **24**, № 6, 252 (англ.)

Сообщение фирмы «Микромакс» (Micromax Co.) о выпуске миниатюрных угольных потенциометров с круговым вращением оси движка, дающих возможность периодического получения некоторых функций (синус, косинус, логарифм, корень и т. п.). Потенциометры выпускаются как одиночными, так и собранными на общей оси. Ось потенциометра не имеет люфта и требует очень малого момента для вращения, что обеспечивает большой срок службы потенциометров и позволяет работать на больших скоростях. *Ю. И. Визун*

2940. Сверхминиатюрные трансформаторы (Subminiature transformers), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 1, 90 (англ.)

Сообщение фирмы D and R Ltd. о выпуске малогабаритных трансформаторов питания, выдерживающих сильные удары, температурные изменения и вибрацию. Приводится фотография трансформатора «модель DR-T107» мощностью 5 *вт* на частоте 400 *гц*, разработанного для применения с печатными схемами. Корпус цилиндрический, диаметр и высота менее 2,5 *см*. *В. К. Зейденберг*

2941. Сверхминиатюрные радиодетали (Subminiatyrisering av elektronikkomponenter), Tekn. tidskr., 1954, **84**, № 1, 9—12 (швед.)

Приводятся данные некоторых миниатюрных деталей (сопротивлений, конденсаторов, трансформаторов), предназначенных для работы с кристаллическими триодами. Описываются некоторые способы производства печатных схем. Приведены фото миниатюрных деталей и аппаратуры. См. также РЖМат, 1954, 3502, 3504. *Л. В. Кутуков*

2942. Пентоды для счетных машин (Pentode for computers), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 3, 386 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой RCA малогабаритного пентода 6197, предназначенного для применения в счетных машинах. Пентод 6197 имеет короткую отсечку и высокую крутизну.

Л. В. Кутуков

2943. Германиевые диоды испытываются в автоматической вычислительной машине (Germanium diode experience in automatic computer), Instrum. Practice, 1954, 8, № 7, 618—619 (англ.)

Сообщается о результатах использования 16 000 германиевых диодов в вычислительной машине СЕАК (SEAC), принадлежащей Национальному бюро стандартов (США), за первые шесть месяцев ее эксплуатации. Из указанного числа диодов, находившихся под напряжением, после 2500 час. эксплуатации оказались непригодными из-за роста обратного тока всего лишь 5,4%. Большинство диодов, параметры которых постепенно ухудшались, были обнаружены при решении контрольной задачи во время профилактики. Германиевые диоды, имеющие по паспорту 50 *в* допустимого обратного напряжения и 50 *ма* прямого тока, используются в схемах СЕАК в режимах, допускающих максимальное обратное напряжение на диоде до 40 *в* и максимальное пиковое значение прямого тока до 20 *ма*. Каждый диод проверяется до и после пайки в субблоке. По результатам испытания диоды делятся на партии. «Нормальные» диоды имеют при 40 *в* обратного напряжения до 250 *μа* тока, 300 *μа* после пайки и 500 *μа* при эксплуатации. Для партии «хороших» диодов соответствующие токи равны 120, 200 и 300 *μа*. Максимально допустимое падение напряжения на диоде при прямом токе 20 *ма* равно 2 *в* после пайки и 2,3 *в* при эксплуатации. Подробно рассматриваются причины, вызывающие нестабильность обратного тока диода. Указывается, что главным критерием возможности использования данного образца в схеме является нестабильность обратного тока, а не его абсолютная величина. Сообщается, что в США выпускается до 4 000 000 германиевых диодов в год.

А. Б. Залкинд

2944. Электронное оборудование и надежность. Хилл (Electronic equipment and reliability. Hill J. L.), Electr., Manufact., 1954, 54, № 3, 324, 326, 328, 330 (англ.)

Рассматривается ряд вопросов, связанных с надежностью работы электронного оборудования и, в частности, электронных вычислительных машин. К основным источникам неисправностей автор относит электронные лампы, германиевые диоды, реле. Указывается, что к. п. д. больших электронных цифровых машин (по времени) возрос с 1948 до 1953 г. в среднем от 65 до 90%. *А. А. Брызгалин*

2945. Кремниевые триоды (Silicon transistor announced), Broadcast. Telecast, 1954, **46**, № 7, 76 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Райтеон» (Raytheon) о кремниевых триодах. Указывается, что кремниевые триоды испытываются при температурах до 170°.

2946. Кремниевый триод (Silicon transistor announced), Electronics, 1954, **27**, № 2, 6, 8 (англ.)

В общих чертах обсуждаются перспективы, открываемые предполагаемым выпуском кремниевых триодов. Приводятся данные коэффициента усиления тока (0,95 и даже 0,995) и предельной частоты (10 *Мгц*), уже полученных на таких триодах. Кратко описывается способ изготовления кремниевых триодов с поверхностным барьером. Упоминается о работе фирм «Дюпон» (Du Pont) и «Игл» (Eagle) по получению чистого кремния и фирмы «Филко» (Philco) по изготовлению триодов. Указывается, что кремниевые триоды фирмы «Филко» находятся еще только в стадии лабораторных моделей. *Н. Б.*

2947. Очистка германия методом зонного расплавления (Zone-melting process provides method for refining germanium), Electr. Engng, 1954, **73**, № 5, 484—485 (англ.)

Краткое сообщение о методе зонного расплавления, применяемом для очистки германия фирмой «Белл». Очищаемый материал помещается внутри ряда работающих поочередно кольцевых индукционных нагревателей. Вследствие того, что примеси лучше растворяются в материале германия, когда он находится в расплавленном состоянии, они постепенно, с перемещением зоны расплавления, смещаются в одну сторону материала. Нагрев германия производится до 960°. Как указывается в статье, в результате такого процесса могут быть получены образцы, содержащие 99,99999999% чистого германия. *Н. И. Бродович*

2948. Очистка германия (Germanium purification), Tele-Tech, 1954, **13**, № 4, 71 (англ.)

См. реф. 2947.

2949. Этот метод очистки германия снижает концентрацию примесей ниже чем до 5 частей на биллион (This germanium refining method keeps impurities down to less than 5 parts in a billion), Wisconsin Engr, 1954, 58, № 6, 35 (англ.)

Реклама фирмы «Уэстерн Электрик» (Western Electric). Приводится фотография устройства для зонной очистки германия, идущего на полупроводниковые приборы. См. реф. 2947. *В. С.*

2950. Золоченые германиевые диоды особого назначения (Gold bonded germanium diodes... designed for superior service), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 11, 157A (англ.)

Сообщение фирмы «Транзистор Продуктс» (Transistor Products Inc.) о выпуске германиевых диодов с золоченым контактом. Золочение германия производится для обеспечения надежного (сварного) контакта. Диоды типа TP имеют малые размеры — около 5 *мм* в диаметре. Указывается, что диоды имеют малый разброс характеристик, малую емкость и прямое сопротивление и обладают высокой надежностью в работе. *В. А. Зимин*

2951. Новое о полупроводниковом триоде (Neues vom Transistor), Funkschau, 1953, **25**, № 9, 160 (нем.)

Краткая статья общего характера, содержащая данные (см. табл. 1), а также эскиз габаритных размеров серийных точечно-контактных германиевых триодов типов А1698 и А1768 фирмы «Уэстерн Электрик» (Western Electric).

Таблица 1

	А1698	А1768
Максимальное напряжение коллектора	100 *в*	30 *в*
Максимальный ток коллектора	15 *ма*	25 *ма*
Максимальный ток эмиттера	15 *ма*	15 *ма*
Мощность, рассеиваемая коллектором	120 *мвт*	120 *мвт*
Температура окружающей среды	55°	40°
Максимальное входное сопротивление	560 *ом*	—
Предельная частота (при которой коэффициент усиления тока α снижается на 3 по отношению к своему значению для 1000)	2 *Мгц*	—

В. И. Зоягин

2952. **Полупроводниковые сверхприборы, разработанные фирмой «Сильвания»** (Supertransistor types develope by Sylvania), Electr. Engng, 1953, **72**, № 10, 945 (англ.)

Краткое сообщение о предстоящем выпуске фирмой «Сильвания» (Sylvania Electric Products, Inc.) полупроводниковых точечно-контактных тетродов и пентодов (РЖМат, 1954, 3140—3142). *Я. Н.*

2953. **Полупроводниковые тетроды и пентоды** (Tetrode and pentode transistors), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 4, 20 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3140—3142.

2954. **Новый мощный полупроводниковый триод** (Powerful new transistor), Electr. Engng, 1954, **73**, № 1, 46А (англ.)

См. РЖМат, 1954, 4971.

2955. **Первые практические применения полупроводниковых триодов** (Premieres applications pratiques des transistors), Toute radio, 1953, **20**, № 175, 131—132 (франц.)

Краткая статья, содержащая некоторые данные и фотоснимки первых образцов телевизионной и радиоаппаратуры, разработанной с применением полупроводниковых триодов взамен ламп.

Приведен фотоснимок элемента счетной машины, у которого благодаря применению полупроводниковых триодов значительно уменьшены габаритные размеры и в 4 раза сокращено потребление электроэнергии. *Е. Ч.*

2956. **Применения полупроводниковых триодов** (Transistor applications), TV and Radio Engng, 1953, **23**, № 3, 10 (англ.)

Сообщение о конкурсе на предложения по применению полупроводниковых триодов, объявленном фирмой «Райтеон». Предусматривалось 17 премий от 5000 до 100 долларов.

2957. **Полупроводниковые диоды и триоды. Фолькман** (Kristalldioden und Transistoren. Volkmann Richard), Electro — Anzeiger, 1953, Sept., № 37, 344—345 (нем.)

Краткая статья общего характера.

2958. **Полупроводниковые триоды** (Les transistors), Atomes, 1953, 8, № 88, 225—228 (франц.)

2959. **Основы теории полупроводников и полупроводниковых триодов. Лефивер** (A summary of semiconductor and transistor theory. Lefever Robert A.), J. Chem. Education, 1953, **30**, № 11, 554—556 (англ.)

2960. **Полупроводниковые триоды. Кравиц** (The transistor. Kravitz Larry), Kansas Engr, 1953, **37**, № 4, 18—20, 32, 36, 38, 40, 45, 50 (англ.)

Статья для инженеров, не знакомых с электроникой.

2961. **Современное состояние развития полупроводниковых триодов. Мортон** (Gegenwärtiger Stand der Transistorenentwicklung. Morton J. A.), Funk und Ton, 1953, **7**, № 10, 545—547 (нем.)

Продолжение перевода. Начало см. РЖМат, 1954, 5858.

2962. **Современное состояние развития полупроводниковых триодов. Мортон** (Gegenwärtiger Stand der Transistorenentwicklung. Morton J. A.), Funk und Ton, 1953, **7**, № 11, 594—597 (нем.)

Окончание перевода. См. РЖМат, 1954, 5858; 1955, 2961.

2963. **Магнитный регистр со сдвигом, использующий один сердечник на единицу информации. Кодис, Руман, Ву** (Magnetic shift register using one core per bit. Kodis R. D., Ruhman S., Woo W. D.), Convent Rec. I. R. E., 1953, № 7, 38—42 (англ.)

Описывается принцип работы регистра на магнитных сердечниках, отличающегося от ранее описанных тем, что на один двоичный разряд используется только один сердечник. В других системах для записи и дальнейшей передачи одного двоичного разряда использовалось два или даже три сердечника. Соответственно этому для продвижения информации по регистру на один разряд необходимо было прикладывать два или три импульса. В описываемой системе для продвижения информации на один разряд требуется только один импульс тока. Уменьшение числа сердечников до одного на элемент достигнуто за счет введения в схему накопительного конденсатора, который после подачи продвигающего импульса тока заряжается, если на предыдущем элементе была записана «единица», а затем разряжается на следующий сердечник, тем самым передавая информацию дальше. Регистр работал на частоте до 100 *кгц*.

Основные преимущества системы: уменьшение оборудования на 50%; простота устройства; хорошее отношение сигнал/помеха; выходной уровень достаточен для прямого параллельного считывания; высокая устойчивость работы. Приведены расчет-

ные формулы, схемы и осциллограммы работы регистра. *Н. В. Корольков*

2964. Оценка высококачественных материалов для магнитных сердечников. Хо (Evaluation of high-performance magnetic core materials. Hoh Siegfried R.), Tele-Tech, 1953, 12, № 11, 92—94, 155—157 (англ.)

Обзор современных магнитных материалов для высоких частот; даются некоторые рекомендации по выбору этих материалов. Отмечается, что получение металлических лент тоньше 3—4 μ встречает не только технологические трудности, но ведет к заметному росту коэрцитивной силы.

Приводятся библиография (19 наименований) и характеристики ряда магнитных материалов. *О. В. Росницкий*

2965. Малогабаритный магнитный усилитель (Miniaturized magnetic amplifiers), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 11, 1082—1083 (англ.)

Сообщение компании D and R Ltd. о новой модели магнитного усилителя МА-48, имеющего вес 90 *г* и мощность выхода до 25 *вт*. МА-48 обладает малым временем срабатывания и большим усилением по мощности. Компания выпускает магнитные усилители для работы на частотах 4 *кгц*; 2 *кгц*; 400 *гц* и 60 *гц*. *А. Б. Залкинд*

2966. Новое быстродействующее запоминающее устройство фирмы RCA (New RCA experimental high speed memory), Michigan Technic, 1953, 72, №2, 20 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2754.

2967. Мощное средство научного исследования. Лебедев С., Газета «Известия Советов Депутатов Трудящихся СССР», 22 мая 1955 г., 3

Статья общего характера о вычислительных машинах и их применении. Указывается, что в Академии наук, в Министерстве машиностроения и приборостроения и в других организациях созданы и успешно работают первоклассные электронные счетные машины. На этих машинах решено большое количество задач из области физики, химии и др. Вычислен ряд обширных таблиц специальных функций.

2968 П. Кристаллический тетрод. Блейкли (Crystal tetrode. Blakely Robert T.) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2666150, кл. 307—88, 12.01.54

Кристаллический тетрод, имеющий один базовый электрод, несколько входных и один выходной электрод точечного типа. Тетрод может быть использован в качестве вентиля. *А. Б. Залкинд*

2969 П. Усилитель на кристаллических триодах с особой схемой питания. Рейсбек, Уоллес (Transistor amplifier and power supply therefor. Raisbeck Gordon, Wallace Robert Lee, Jr.) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2666817, кл. 179—171, 19.01.54

Двухкаскадный усилитель, в котором осуществляется питание эмиттерных и коллекторных цепей обоих триодов от одного источника. *А. Б. Залкинд*

2970 П. Полупроводниковый прибор для передачи сигналов. Шокли (Semiconductor signal translating device. Shockley William) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2654059, кл. 317—235, 29.09.53

Усилитель на полупроводниковом триоде типа *n-p-n*. *А. З.*

2971 П. Абак. Сейденберг (Abacus. Seidenberg Oscar). Пат. США 2654164, кл. 35—33, 6.10.53

Обыкновенные конторские счеты с 8 проволоками и 10 косточками на каждой. Две средних косточки каждой проволоки сделаны немного большего размера, чтобы можно было отличать их на ощупь. *В. М. Брадис*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

2972. Автоматическое устройство вывода на посадку (Automatic approach controller), Airports and Air Transp., 1954, 8, № 105, 17—19, 21 (англ.)

Устройство ВОЛСКАН (VOLSCAN — AN/GSN-3) предназначено для автоматизации диспетчерской службы управления посадкой самолетов, прибывающих на аэродром или на группу аэродромов, расположенных близко один к другому, и производит вывод самолетов в «ворота» аэродрома, находящиеся в 3 *км* от места приземления. Пропускная способность аэродрома, оборудованного устройством ВОЛСКАН, 2 самолета в 1 мин. Такая высокая пропускная способность необходима для управления посадкой больших групп самолетов, возвращающихся с боевой операции, и особенно важна для быстрой посадки соединений реактивных самолетов.

Источником данных о положении самолетов является несколько переделанная радиолокационная станция AN/CPN-18. Станции этого типа в настоящее время обслуживают большинство авиационных баз. Данные с AN/CPN-18 поступают на устройства автоматического сопровождения самолетов АНТРАК (ANTRAC). Каждое устройство АНТРАК следит за движением одного самолета. Оператор по желанию может переключить любое из устройств АНТРАК на сопровождение любого самолета. Данные о положении самолетов с выхода АНТРАК передаются для обработки в специальное вычислительное устройство ДАТАК (DATAC) (см. фото). ДАТАК выбирает самое раннее возможное время прибытия и вырабатывает данные, которые ведут самолет по кратчайшему пути к месту посадки. Если же это время предназначено уже для прибытия другого самолета, ДАТАК выбирает более поздний свободный 30-секундный интервал. В этом случае даются указания о другом курсе следования, чем достигается задержка самолета. Если самолет отклоняется от предписанного пути, ДАТАК не возвращает его на этот путь, а вычисляет новый, оптимальный для данного положения самолета. ДАТАК непрерывно вычисляет время прямого пути, а также время полета самолета до назначенного срока прибытия. Это время должно быть различным у всех самолетов во избежание столкновения. Одновременно ДАТАК вычисляет отношение времени до прибытия к времени прямого пути. Эта величина характеризует положение самолета по отношению к предписанному

времени прибытия. Если отношение равно единице, то ДАТАК дает указание о курсе, которое направляет самолет по прямолинейному пути (самолет летит с прежней скоростью). Если отношение меньше единицы, самолет опаздывает, и ДАТАК дает указания о курсе, которые будут удерживать самолет на прямолинейном пути, а также указание

К реф. 2972

об увеличении скорости. Если отношение больше единицы, самолет может прибыть ранее предписанного времени, и поэтому ДАТАК указывает курс, отличающийся от прямого, причем это отклонение пропорционально величине отношения, так что получающийся в результате путь создает необходимую задержку самолета. ДАТАК не определяет для самолета какого-либо фиксированного пути, а непрерывно вычисляет, каким курсом должен следовать самолет в данный момент, чтобы прибыть в назначенное время. Передача данных с выхода ДАТАК на самолет может производиться путем передачи устных приказов пилоту или непосредственно на автопилот.

Во время испытания определялась оптимальная длина пути, контролируемого системой. Было получено, что полет в течение 7 минут является оптимальным для реактивных самолетов. Для пропускной способности 2 самолета в 1 мин. необходимо иметь 14 комплектов устройства АНТРАК. Система может удовлетворительно работать при управлении самолетами лишь в течение 5 мин., это значит, что система способна обеспечить указанную пропускную способность при выходе из строя 4 устройств.

Определение средней ошибки привода самолетов в назначенное время показало, что она составляет от 6,2 до 8,4 сек. в зависимости от типа самолета. От этой ошибки зависит наименьший допустимый временной интервал следования самолетов и, следовательно, наибольшая пропускная способность. Так как установка включает несколько одинаковых каналов, то не требуется специального резерва: каждый является резервом для других. Максимальный радиус действия системы 100 *км*.

Устройство ВОЛСКАН разработано исследовательским центром Военно-воздушных сил США в Кембридже, Массачусетс (US Air Force Research Centre). Разработка устройства продолжалась 5 лет. Опытный образец установлен в Форт-Дауэсе (Fort-Dawes) для обслуживания ряда аэродромов в районе Бостона. Вся основная аппаратура установлена в подземных убежищах. Стоимость устройства ВОЛСКАН с 7 комплектами АНТРАК — ДАТАК (пропускная способность 60 самолетов в 1 час) при серийном производстве составит около 65000 долларов. Число ламп в каждом таком канале около 60. *Л. В. Кондратьев*

2973. ВОЛСКАН — устройство для управления посадкой самолетов (VOLSCAN 120 landings a minute (New Air Force landing aid)), Aero Digest, 1954, **68**, № 2, 46 (англ.)

Сообщение о разработке Кембриджским исследовательским центром Военно-воздушных сил США устройства для управления посадкой самолетов; пропускная способность —120 самолетов в 1 мин. Стоимость устройства около 100 000 долларов. Устройство может быть применено для наведения самолетов на цель в воздушном бою. См. реф. 2972. *В. Д. Князев*

2974. ВОЛСКАН распутывает клубок воздушного движения в районе аэродрома. Класс (Volscan unsnarls airport traffic jam. Klass Philip), Aviat. Week, 1953, **59**, № 26, 38—43 (англ.)

См. реф. 2972. Дополнительно сообщается, что если в зону управления прибывает самолет, требующий внеочередной посадки, то оператор может нажатием кнопки назначить этому самолету ближайшее время посадки. В ДАТАК могут быть введены скорость и направление ветра для вычисления маршрута с поправкой на ветер. *Л. В. Кондратьев*

2975. ВОЛСКАН — автоматическое электронное устройство для управления посадкой самолетов (VOLSCAN — automatic electronic system controls landing of incoming planes), Electr. Engng, 1954, **73**, № 2, 183—184 (англ.)

См. реф. 2972. Дополнительно сообщается, что передача данных на самолет будет осуществляться с помощью стандартной системы связи. Поскольку этой системой оборудованы еще не все самолеты, то данные, вырабатываемые устройством ДАТАК, передаются голосом по радиоканалу. При использовании системы связи данные могут вводиться на самолетные приборы либо в автопилот. ВОЛСКАН с приданным ему локатором размещается в двух фургонах. В одном размещается локатор и пульт управления, в другом — вся аппаратура ВОЛСКАН. *Л. В. Кондратьев*

2976. ВОЛСКАН — электронное устройство управления воздушным движением (VOLSCAN. An electronic traffic controller), Flying Safety, 1954, **10**, № 4, 2—5 (англ.)

См. реф. 2972.

2977. Панорамное вычислительное устройство для вычерчивания курса самолета. Сперри (A pictorial flying computer. Sperry Arthur B.), Navigation, 1953, **3**, № 10, 356—359 (англ.)

Описывается навигационный прибор фирмы «Сперри» (Sperry Gyroscope Co.), вычерчивающий на карте района полета курс самолета. Прибор принимает данные, передаваемые с земли (расстояние от места передачи и угол между направлением от передающей станции к самолету и направлением

магнитной стрелки), и автоматически переносит местонахождение самолета на карту. Вычерчивание производится специальным термопером на карте, покрытой легкоплавким составом. *Л. С. Легезо*

2978. Панорамное вычислительное устройство для вычерчивания курса самолета. **Холахан** (Pictorial computers. Holahan James), Flying, 1953, **53**, № 4, 26—27, 58 (англ.)

Описывается панорамное вычислительное устройство для вычерчивания курса самолета (см. реф. 2977). К настоящему моменту фирмой «Арма» (Arma Corp.) выпущено пять моделей подобных устройств. Наиболее совершенной является модель КАА-V (CAA-V). Устройство имеет экран диаметром 25 *см*, на который проектируется кинолента шириной 35 *мм* с изображением карт различных районов страны. На каждом кадре киноленты изображен район, непосредственно прилегающий к маяку, передающему информацию на самолет. Маяк помещается в центре экрана и относительно него отсчитываются расстояние до самолета и азимут самолета, измеренный на маяке. Положение самолета на экране определяется миниатюрным изображением самолета, которое также проектируется на экран. Направление движения самолета определяется спроектированной на экран вращающейся стрелкой, связанной в своем поступательном движении с изображением самолета, которое находится в центре концентрических масштабных линий. По этим линиям можно определить расстояние от самолета до любого пункта карты. По краю экрана нанесена градусная сетка, с помощью которой можно определить вторую координату самолета. Кинолента имеет 800 кадров, но так как маяков в США насчитывается 291, то часть районов, наносится на кадры-карты в нескольких масштабах. Перед полетом летчик должен установить на экране карту предполагаемого района полета. Информация, получаемая самолетом с маяка, преобразуется в напряжения, соответствующие двум координатам самолета, и по двум разным входам направляется в сервомеханизм, приводящий в движение изображение самолета. Стрелка, указывающая направление движения самолета, имеет привод от магнитного компаса. По мере продвижения самолета будет двигаться и изображение его на экране. При достижении границ карты одного района, что регистрируется падением специального флажка, летчик должен переместить ленту так, чтобы на экране появилась карта другого района. При безветренной погоде самолет можно вести, следя лишь за тем, чтобы стрелка все время совпадала с вычерченной на карте линией курса самолета. При ветре необходимо сделать упреждение. Прибор может быть использован не только для навигационных целей, но и для бомбометания. Точность определения положения самолета доходит до $\pm 5 \div 6$ *км*, а по углу до $\pm 0{,}5°$. Направление стрелки можно отметить с точностью до $\pm 1°$. Вес прибора 15 *кг*; стоимость от 3 000 до 4 000 долларов.

Л. С. Легезо, В. П. Парамонов

2979. Панорамный индикатор с применением проекционного устройства. **Поридкий** (Pictorial display uses film projection. Poritzky Siegbert B.), Aviat. Age, 1953, **20**, № 3, 48—53 (англ.)

См. реф. 2978.

См. также: 2904, 2905

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абелланс 2837
Абрамовиц 2886
Агнью 2735
Агостинелли 2653
Агостини 2509
Агранович М. С. 2741, 2742
Азлецкий С. П. 2567
Аксон 2932
Алберт 2579
Александров А. Д. 2491
Александров П. С. 2486, 2573 К
Аллен 2736
Амато 2660
Амброз 2876
Амемия 2762
Аренд 2889, 2890
Ахиезер Н. И. 2752
Ацел 2588

Б

Багчи 2755
Баджемил 2619, 2645
Бань 2855
Баренблатт Г. И.. 2688
Батикль 2805, 2806
Бауэр 2923
Бахмутская Э. Я. 2515
Баш 2489
Башмакова И. Г. 2494
Беленький Н. 2894
Белозеров С. Е. 2502
Бельтюков Б. А. 2661
Берджесс 2593
Берейс 2839
Бернштейн С. Н. 2628 К
Берс 2695
Бертолини 2718
Бибербах 2675 К
Бини 2811
Биркгоф 2899 К
Бланч 2751 РЕЦ
Блейкли 2968 П
Блок 2556
Блок 2654
Блох З. Ш. 2716
Блюментель 2872
Болл 2560 К
Бомонт 2560 К
Бомпьяни 2853
Борувка 2662
Браун 2554
Браунбек 2704
Бреус К. 2507
Бригс 2546
Бурау 2835
Бурдина В. И. 2606
Буш 2784
Бхатнагар 2724
Бэрд 2920
Бюке 2552

В

Вада 2600
Вада 2586
Вакка 2745
Ван-дер-Варден 2559 К
Василаке 2713
Варт 2684
Варшавский 2636
Вейль 2544
Вейценбёк 2875
Векуа И. Н. 2650
Верблюнский 2624
Виленкин Н. Я. 2568
Винер 2802
Винкельбауэр К. 2786
Винтнер 2672, 2859
Винченсини 2878
Витовский Б. В. 2896
Влодарский 2754
Волькенштейн М. В. 2800
Вредендёйн 2522
Ву 2963

Г

Гальярдо 2665
Гегелия Т. Г. 2640
Гельфанд И. М. 2707
Герман 2538
Герст 2910
Гест 2789
Гика 2770
Гиллис 2669
Глаголев Н. А. 2826 К
Глаголева Н. Н. 2845
Глушков В. М. 2571
Гнанадосс 2731
Гнеденко Б. В. 2517, 2778
Гомес-Агилар 2590
Гофман 2734
Грейшиан 2929, 2930
Греко 2615
Гренандер 2791
Гриффит 2604
Грюнбаум 2527 РЕЦ
Гумбель 2792
Гурматай 2819
Гусейнов А. И. 2710
Гуссов В. В. 2501
Гут 2536
Гхош 2696
Гюнтер 2542

Д

Данжуа 2591
Дахия С. А. 2518
Дедебан 2782
Дедиер 2487
Дедо 2832, 2833, 2834
Декёйпер 2842
Деккер 2526
Депман И. Я. 2505, 2516
Дёрр 2746
Де-Сьюа 2525
Деэвель 2602
Дженнер 2582
Джордан 2887
Диананда 2777
Дирак 2595
Дынкин Е. Б. 2607
Дыхман Е. И. 2670
Дьёдонне 2760, 2761
Дюпарк 2548

Е

Евграфов М. А. 2632
Елистратова Т. А. 2902 Д
Есенин-Вольпин А. С. 2620
Ефимов Н. В. 2815 К

Ж

Жевуский 2687
Жерме 2656, 2712
Жиро 2775

З

Зейдель 2645
Зигель 2667
Зилен 2797
Зубов В. П. 2498
Зюсс 2488

И

Инграм 2851, 2864
Исай 2714
Ишлинский А. Ю. 2715

К

Кавалларо 2499
Кадержавек 2840
Калапсо 2844
Камрас 2931
Карлиц 2540, 2543, 2545, 2553
Карльквист 2883
Картеси 2843
Касахара 2668
Кастольди 2723, 2856
Като 2769
Кауфман 2865
Кей 2690
Келс 2674 К
Кендалл 2798
Керкби 2884
Керр 2736
Кертис 2578
Кертис 2934
Кёйперс 2549
Кизини 2836
Кимура 2658
Киприянов И. А. 2627
Кирик Новгородец 2497
Класс 2974
Клетеник Д. В. 2816 К
Клуни 2730
Кованцов Н. И. 2846
Кодис 2963
Комацу 2635
Комб 2558
Кон 2575

Конрад 2576
Кордес 2768
Коревар 2737, 2738
Костелянец П. О. 2613
Костен 2914, 2917
Котт 2757
Коэн 2532
Кравиц 2960
Кретнер 2821
Кудрявцев Л. Д. 2609
Кузьмина А. Л. 2630
Курамоти 2651
Курепа 2621

Л

Лавридж 2929
Ладыженский Л. А. 2759, 2773 Д
Лаурикайнен 2885
Лебедев С. 2967
Легран 2863
Леду 2758
Лейсенринг 2873
Лефивер 2959
Лёвнер 2689
Лион 2682
Лишин Н. В. 2562
Ловаши-Надь 2692
Логи 2933
Локс 2732
Лопушанский 2781
Лотоцкий А. В. 2733
Лоясевич 2673
Лузин Н. Н. 2617 К
Лукач 2776
Ляпин Н. М. 2511

М

Мазотти 2818
Макай 2659
Макдоналд 2919
Максфилд 2564
Манакорда 2699
Марусси 2858
Мацусака 2838
Мачадо 2782
Меддьеши 2803
Мейер 2921
Мелан 2693
Мергелян С. Н. 2631
Мерон 2927
Мёленбелд 2549
Миллер 2848
Милс 2550
Минлос Р. А. 2707
Миноцци 2686
Мозер 2533
Мой 2780
Молнар 2810
Моринага 2618
Морс 2614
Мортон 2961, 2962
Мостеллер 2784
Мукхерджи 2755
Мураккини 2841, 2854, 2867
Мюллер 2529, 2530
Мюллер 2871

Н

Накано 2763
Нассиф 2629
Наш 2779
Нейшулер Л. Я. 2891
Несмеянов А. Н. 2484
Несторович Н. М. 2511
Нисигори 2618
Новак 2622
Новиков П. С. 2521
Новоселов С. И. 2729 К
Новотный 2622
Ногути 2599
Нонуэйлер 2884
Норсуэрти 2925
Норткотт 2581

О

Облат 2809
Огиевецкий И. И. 2740
Оден 2764
Одзава 2634
О'Коннор 2937
Олекевич 2787, 2790
Олейник О. А. 2677
Олива 2537
Опря 2849
Отле 2758
Отрадных Ф. П. 2510
Отто 2927

П

Падмавалли 2739
Палама 2748
Парк 2747
Парсонс 2924
Пейн 2700
Пеллегрино 2765, 2766, 2767
Пини 2680, 2681
Пинль 2852
Пирс 2822
Плаккетт 2783
Поваров Г. Н. 2913
Погожельский В. 2638, 2639
Пози 2604
Положий Г. 2507
Порицкий 2979
Пород 2801
Привалов И. И. 2817 К
Проди 2678
Прудников В. Е. 2519
Птицын О. Б. 2800
Пул 2915, 2916
Пхакадзе Ш. С. 2610

Р

Раик А. Е. 2512
Райли 2648
Райс 2524
Рамасарма 2551
Ранкин 2541
Распанти 2903
Рашфорт 2541
Редеи 2596
Реза 2909
Рейн 2555
Рейсбек 2969 П
Рейхарт 2893
Рейхенбах 2527 РЕЦ
Рейхман 2557
Ремак 2539
Решетняк Ю. Г. 2613, 2828 Д
Рёрль 2657
Рингель 2603
Рис 2581
Рогаченко В. Ф. 2500
Розенблатт 2791
Рот 2598
Рошкулец 2649
Рубин 2697
Руман 2963
Рунд 2820
Рюдигер 2702

С

Салем 2616
Сансоне Дж. 2676 К
Сарган 2794
Сас 2776,
Сас 2823, 2824, 2825
Сатакэ 2644
Сбрана 2655
Севери 2647
Севрен 2831
Сегре 2830, 2860, 2861
Сейденберг 2971 П
Секей 2804
Сен 2814 К
Сенгупта 2726
Сенгупта 2788
Сенькин Е. П. 2880 Д
Серпинский 2547
Сигел 2750
Сиккема 2643
Сил 2912
Синг 2900 К
Сингер 2876
Сингх 2642
Сирота 2584
Скаков А. И. 2807
Скеллетт 2929
Скорца-Драгони 2728
Скотт 2565
Скулем 2534, 2535
Слитор 2750
Смола 2801
Содаро 2897
Солнцева Т. В. 2829 Д
Сорокин В. С. 2694
Сперри 2977
Спротт 2796
Станюкович К. П. 2683
Стриженов С. И. 2901 Д
Суччи 2767
Сюй Ли-чжи 2727

Т

Такасу 2866
Такеда 2771
Тамадян А. П. 2631
Тамми 2633
Тарасов И. С. 2879 Д
Тарратс-Видаль 2862
Татт 2597
Татчелл 2744
Тебо 2813
Тенка 2506
Теодореску 2513
Трублад 2921
Туманьян Т. Г. 2496

У

Уайлдер 2598
Уайлер 2874
Уайтхед 2601
Угодчиков А. Г. 2641
Ульянов П. Л. 2625
Уокер 2793
Уоллес 2969 П
Уорд 2756

Ф

Фазекаш 2808
Фейеш-Тот 2574
Фельберг 2882
Феньё 2708, 2709
Фер 2706
Фет А. И. 2608
Фиалков 2910
Фикера 2698
Финетти 2774
Фиников С. П. 2847
Финн 2679
Фладт 2870
Флетчер 2892
Фог 2812
Фокнер 2719
Фолькман 2957
Форт 2592, 2877
Френер 2766
Фреше 2869
Фрейденталь 2589, 2594
Фриман 2924
Фринк 2583
Фрюауф 2705
Фурман 2827 К

Х

Хагстрем 2520
Хаммерсли 2751 РЕЦ
Харазов Д. Ф. 2772 Д
Харролд 2604
Хартман 2672
Хас 2666
Хеймо 2569
Хейтинг 2523
Хендлер 2725
Херстейн 2565
Херш 2721
Хёльдер 2717
Хилл 2749
Хилл 2944
Хо 2964
Ховла 2565
Холахан 2978
Холл 2566
Хоссу 2722
Хохейзель 2587
Хункоса 2881

Ц

Церантонелло 2899 К
Целлер 2743
Цермель 2504
Цзан 2908
Цудзи 2637

Ч

Чанда 2785
Чеботарев Г. Н. 2563
Чезари 2612
Чеккони 2611
Чермак 2663
Черняев М. П. 2511
Чжоу Юань-ши 2626
Чжэнь Ю. В. 2691
Чикин Л. А. 2711

Ш

Шарский 2664
Шафер 2580
Шевалье 2531
Шекел 2907
Шерк 2868
Шестаков В. И. 2904, 2905
Шёнеборн 2572
Шиффер 2646
Шмидт 2671
Шнейдер А. А. 2623
Шнейдер 2577
Шокли 2970 II
Шрикханде 2795
Шталь 2701
Штёр 2906
Шуберт 2605
Шустер 2595

Э

Эванс 2765
Эванс 2570
Эврар 2703
Эгервари 2561
Эгервари 2692
Эйлер 2492 К
Эйнштейн 2865
Эйхлер 2528
Элдертон 2799 К
Эльсгольц Л. Э. 2720
Эссен 2753
Эст 2589
Эуранто 2885
Эфферц 2911

Ю

Юрцолла 2895
Юшкевич А. П. 2493

Я

Яковлев К. П. 2898 К
Янг 2881, 2899 К
Яношши 2888
Янь Чжи-да 2857
Ян Чжун-дао 2585
Ярдецкий 2685

A

Abellanas P. 2837
Abramowitz M. 2886
Aczél J. 2588
Agnew R. P. 2735
Agostinelli C. 2653
Agostini A. 2509
Albert A. A. 2579
Alexandrov P. S. 2573 К
Allen A. C. 2736
Amato V. 2660
Ambrose W. 2876
Amemiya I. 2762
Arend S. 2889, 2890
Audin M. 2764
Axon P. E. 2932

B

Bagchi H. das 2755
Bagemihl F. 2619, 2645
Baird D. G. 2920
Ball R. W. 2560 К
Basch A. 2489
Baticle E. 2805, 2806
Bauer L. 2923
Beaumont R. A. 2560 К
Bereis R. 2839
Bers L. 2695
Bertolini F. 2718
Bhatnagar K. P. 2724
Bieberbach L. 2675 К
Bini U. 2811
Birkhoff G. 2899 К
Blakely R. T. 2968 II
Blanch G. 2751 **РЕЦ**
Block D. 2556
Block H. D. 2654
Blumenthal L. M. 2872
Bompiani E. 2853
Boruvka O. 2662
Braunbek W. 2704
Briggs W. E. 2546
Brown A. L. 2554
Buquet A. 2552
Burau W. 2835
Burgess C. E. 2593
Bush R. R. 2784

C

Calapso R. 2844
Camras M. 2931
Carlitz L. 2540, 2543, 2545, 2553
Castoldi L. 2723, 2856
Cavallaro V. G. 2499
Cecconi J. 2611
Cermelj L. 2504
Cesari L. 2612
Čermák J. 2663
Chanda K. C. 2785
Chevallier J.-M.2531
Chisini O. 2836
Chowla S. 2565
Chow Yuah Shih 2626
Clunie J. 2730
Cohen E. 2532
Cohn P. M. 2575
Combes A. 2558
Conrad P. 2576
Cordes H. O. 2768
Cotte M. 2757
Curtis Ch. W. 2578
Curtis R. C. 2934

D

Decuyper M. 2842
Dedebant G. 2782
Dedijer S. 2487
Dedò M. 2832, 2833, 2834
Deheuvels R. 2602
Dekker J. C. E. 2526
Denjoy A. 2591
DeSua F. C. 2525
Diananda P. H. 2777
Dieudonné J. A. 2760, 2761
Dirac G. A. 2595
Dörr J. 2746
Duparc H. J. A. 2548

E

Effertz H. F. 2911
Egerváry E. 2561
Egerváry J. 2692
Eichler M. 2528
Einstein A. 2865
Elderton W. P. 2799 К
Esseen C.-G. 2753
Est W. T. van 2589
Euler L. 2492 К
Euranto E. K. 2885
Evans E. 2765
Evans T. 2570
Evrard L. 2703

F

Faulkner F. D. 2719
Fazekas F. 2808
Fehlberg E. 2882
Fejes Toth L. 2574
Fenyö I. 2708, 2709
Fer F. 2706
Fialkow A. 2910
Fichera G. 2698
Finetti B. de 2774
Finn R. 2679
Fladt K. 2870
Fletcher A. 2892
Fog D. 2812
Fort M. K., Jr. 2592, 2877
Fréchet M. 2869
Freeman H. 2924
Frehner H. 2766
Freudenthal H. 2589, 2594
Frink O. 2583
Frühauf H. 2705
Fuhrmann A. 2827 К

G

Gagliardo E. 2665
Germay R. H. 2656, 2712
Gerst I. 2910
Ghika Al. 2770
Ghosh N. L. 2696
Gillies A. W. 2669
Girault M. 2775
Gnanadoss A. A. 2731
Gomez Agullar I. 2590
Goormaghtigh R. 2819
Gratian J.-W. 2929, 2930
Greco D. 2615
Grenander U. 2791
Griffith H. C. 2604
Grünbaum A. 2527 **РЕЦ**
Guest P. G. 2789
Gumbel E. J. 2792
Günther A. 2542
Gut M. 2536

H

Haas F. 2666
Hagstroem K.-G. 2520
Haimo F. 2569
Hall M., Jr. 2566
Hammersley J. M. 2751 **РЕЦ**
Harrold O. G., Jr. 2604
Hartman Ph. 2672
Hendler A. S. 2725
Herrmann O. 2538
Hersch J. 2721
Herstein I. N. 2565
Heyting A. 2523
Hill E. L. 2749
Hill J. L. 2944
Hofmann J. E. 2734
Hoh S. R. 2964
Hoheisel G. 2587
Holahan J. 2978
Hölder E. 2717
Hosszú M. 2722

I

Ingraham R. L. 2851,2864
Isay W.-H. 2714

J

Jánossy L. 2888
Jardetzky W. S. 2685
Jenner W. E. 2582
Jordan P. F. 2887
Juncosa M. L. 2881
Jurzolla E. 2895

K

Kadeřávek F. 2840
Karlqvist O. 2883

Kárteszi F. 2843
Kasahara Sh. 2668
Kato T. 2769
Kaufman B. 2865
Kay I. 2690
Kells L. M. 2674 К
Kendall M. G. 2798
Kerr E. 2736
Kimura T. 2658
Kirkby S. 2884
Klass Ph. 2974
Kodis R. D. 2963
Komatu Y. 2635
Korevaar J. 2737, 2738
Kosten L. 2914, 2917
Kravitz L. 2960
Krettner J. 2821
Kuipers L. 2549
Kuramochi Z. 2651
Kurepa G. 2621

L.

Laurikainen K. V. 2885
Ledoux P. 2758
Legrand G. 2863
Lefever R. A. 2959
Leisenring K. B. 2873
Lions J.-L. 2682
Lochs G. 2732
Loewner Ch. 2689
Logie H. J. 2933
Lojasiewicz S. 2673
Lopuszański J. 2781
Lovass-Nagy V. 2692
Loveridge L. E. 2929
Lukacs E. 2776

M

Macdonald N. 2919
Machado E. A. M. 2782
Makai E. 2659
Manacorda T. 2699
Marussi A. 2858
Masotti A. 2818
Matsusaka T. 2838
Mayer S. W. 2921
Maxfield J. E. 2564
Medgyessy P. 2803
Mehron M. 2927
Melan E. 2693
Meulenbeld B. 2549
Mills W. H. 2550
Minozzi L. 2686
Molnar J. 2810
Morinaga K. 2618
Morse A. P. 2614
Morton J. A. 2961, 2962
Moser L. 2533
Mosteller F. 2784
Moy Shu-teh-Chen 2780
Müller C. 2529, 2530
Müller H. R. 2871
Mukherjee B. nath 2755
Muracchini L. 2841, 2854, 2867
Myller A. 2848

N

Nakano H. 2763
Nash S. W. 2779
Nassif M. 2629
Nishigori N. 2618
Noguchi H. 2599
Nonweiler T. 2884
Norsworthy K. H. 2925
Northcott D. G. 2581
Novák J. 2622
Novotný M. 2622

O

Obláth R. 2809
O'Connor D. G. 2937
Olekiewicz N. 2787, 2790
Oliwa G. 2537
Oprea A. 2849
Ottelet I. 2758
Otto W. 2927
Ozawa N. 2634

P

Padmavally K. 2739
Palamà G. 2748
Pan T. K. 2855
Park D. 2747
Parsons E. 2924
Payne L. E. 2700
Pellegrino F. 2765, 2766, 2767
Pierce W. A. 2822
Pini B. 2680, 2681
Pinl M. 2852
Plackett R. L. 2783
Poel W. L. van der 2915, 2916
Poritzky S. B. 2979
Porod G. 2801
Posey E. E. 2604
Prodi G. 2678

R

Raine Ch. W. 2555
Raisbeck G. 2969 II
Ramasarma B. V. 2551
Rankin R. A. 2541
Raspanti M. 2903
Rédei L. 2596
Rees D. 2581
Reichart Ch. 2893
Reichenbach H. 2527 РЕЦ
Reichman R. I. 2557
Remak R. 2539
Reza F. M. 2909
Rice H. G. 2524
Riley J. D. 2648
Ringel G. 2603
Röhrl H. 2557
Roşculeţ M. N. 2649
Rosenblatt M. 2791
Roth J. P. 2598
Rubin H. 2697
Rüdiger D. 2702
Ruhman S. 2963
Rund H. 2820
Rushforth J. M. 2541
Rzewuski J. 2687

S

Salem R. 2616
Sargan J. D. 2794
Sbrana F. 2655
Schafer R. D. 2580
Scherk P. 2868
Schiffer M. 2646
Schneider Th. 2577
Schöneborn H. 2572
Schubert Horst 2605
Schuster S. 2595
Scorza-Dragoni G. 2728
Scott W. R. 2565
Seal Ph. M. 2912
Segre B. 2830, 2860, 2861
Seidel W. 2645
Seidenberg O. 2971 II
Sen R. N. 2814 К
Sengupta H. M. 2726
Sengupta J. M. 2788
Severi F. 2647
Sevrin A. 2831
Shekel J. 2907
Shirota T. 2584
Shockley W. 2970 II
Shrikhande S. S. 2795
Siegel C. L. 2667
Siegel K. M. 2750
Sierpiński W. 2547
Sikkema P. C. 2643
Singer I. M. 2876
Singh S. K. 2642
Skellett A. M. 2929
Skolem Th. 2534, 2535
Sleator F. B. 2750
Smola F. 2801
Sodaro J. 2897
Sperry A. B. 2977
Sprott D. A. 2796
Stahl K. 2701
Stöhr A. 2906
Succi F. 2767
Süß W. 2488
Synge J. L. 2900 К
Szarski J. 2664
Szász O. 2776
Szász P. 2823, 2824, 2825
Székely G. 2804
Szmydt Z. 2671

T

Takasu T. 2866
Takeda Z. 2771
Tammi O. 2633
Tatchell J. B. 2744
Tenca L. 2506
Teodorescu N. 2513
Tharrats Vidal J. M. 2862
Thebault V. 2813
Trueblood K. N. 2921
Tsang N. F. 2908
Tsuji M. 2637
Tutte W. T. 2597

V

Vaart H. R. van der 2684
Vacca M. T. 2745
Van der Waerden B. L. 2559 К
Vasilache S. 2713
Verblunsky S. 2624
Vincensini P. 2878
Volkmann R. 2957
Vredenduin P. G. J. 2522

W

Wada H. 2600
Wada J. 2586
Walker A. M. 2793
Wallace R. L., Jr. 2969 II
Ward E. E. 2756
Warschawski S. E. 2636
Weil A. 2544
Weitzenböck R. 2875
Whitehead J. H. C. 2601
Wiener N. 2802
Wilder R. L. 2598
Wintner A. 2672, 2859
Włodarski L. 2754
Woo W. D. 2963
Wyler O. 2874

Y

Yang Chung-Tao 2585
Yen Chih-Ta 2857
Young D. M. 2881, 2899 К

Z

Zarantonello E. H. 2899 К
Zelen M. 2797
Zeller K. 2743

佐武一郎 2644
徐利治 2727

Технический редактор *К. И. Игнаткова*

Подп. к печати 26/V 1955 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆. Бум. л. 4,13 Печ. л. 13,5
Заказ 1241 Тираж 3.400 экз. Уч.-изд. л. 21,4 Т-03671

2-я тип. Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10